

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

---

О.В. Нагорнов, В.Г. Никитаев, В.М. Простокишин,  
С.А. Тюфлин, А.Н. Проничев, Т.И. Бухарова, К.С. Чистов,  
Р.З. Кашафутдинов, В.А. Хоркин

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2010

УДК 004.94(075)+517.57(075)

ББК 32.973.26-018.2я7

В 26

**Вейвлет-анализ в примерах:** Учебное пособие. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. – 120 с.

Авторы: *Нагорнов О.В., Никитаев В.Г., Простокишин В.М.,  
Тюфлин С.А., Проничев А.Н., Бухарова Т.И., Чистов К.С.,  
Кашафутдинов Р.З., Хоркин В.А.*

В пособии рассматриваются основы вейвлет-анализа и практические аспекты его применения. Показаны преимущества вейвлет-преобразования перед традиционным преобразованием Фурье при обработке данных. Приведен алгоритм вейвлет-анализа временных рядов.

Пособие предназначено как для студентов 4–5 курсов по специальности «Прикладная математика и информатика», «Компьютерные медицинские системы», «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем», так и для аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математического моделирования и обработки сигналов.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор *Н.А. Кудряшов*

ISBN 978-5-7262-1387-3

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ .....	4
1.1. Обработка зашумлённого сигнала .....	10
1.2. Выявление закономерностей .....	15
1.3. Сжатие информации .....	15
1.4. Другие приложения .....	19
1.5. Классические вейвлеты .....	19
2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ОСНОВЫ ТЕОРИИ).....	21
2.1. Преобразование Фурье (ПФ) .....	21
2.2. «Недостатки» преобразования Фурье (ПФ) .....	25
2.3. Оконное преобразование Фурье (ОПФ) .....	29
2.4. Непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования (НВП и ДВП) .....	31
2.5. Обратное вейвлет-преобразование .....	47
2.6. Простейшие примеры вейвлет-преобразования .....	49
2.7. Основные характеристики вейвлетов .....	72
3. АЛГОРИТМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.....	74
4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ИЗУЧЕНИИ КЛИМАТА.....	81
5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА РАСШИРЕНИЯ WAVELET-TOOLBOX СИСТЕМЫ MATLAB .....	91
6. АВТОМАТИЗАЦИЯ ДИАГНОСТИКИ ОСТРЫХ ЛЕЙКОЗОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА..	102
6.1 Острые лейкозы.....	102
6.2 Автоматизированное обнаружение бластных клеток...	105
6.3 Классификация бластных клеток.....	107
6.4 Механизм получения вейвлет-коэффициентов на примере базиса Хаара для анализа изображения ..	109
6.5 Математическое описание и физический смысл вейвлет-признаков.....	113
Список литературы.....	115

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Идеи теории вейвлетов возникли, когда появилось достаточное количество рядов экспериментальных данных, обработка которых стандартным и хорошо развитым методом преобразований Фурье показала его ограниченность для поиска закономерностей в них. Свою роль сыграло и бурное развитие вычислительной техники, что позволило численно решать такие задачи, которые до этого были просто неподъёмными. Одним из первых понял определённую недостаточную информативность фурье-анализа А.Хаар, который в 1910 году опубликовал систему базисных функций, обладающую основными свойствами вейвлетов (сам термин появился значительно позже – через 70 с лишним лет). Система функций Хаара обладала главными свойствами, специфичными для вейвлетов: локальной областью определения (ограниченными носителями), ортогональностью и единичной нормой, нулевым средним и самободобием (автомодельностью). В настоящее время, однако, многие исследователи, особенно работающие в практических приложениях, понимают под вейвлетами более широкий класс функций. Это и вейвлет-локальные тригонометрические базисы (вейвлеты Малвар), и мультивейвлеты, и так называемые вейвлеты второго поколения, не являющиеся сдвигами и растяжениями одной базисной функции.

Отметим сразу, что базисы преобразования Фурье не являются вейвлетами, так как у них отсутствует локализация информации об исследуемом сигнале в пространстве (времени).

Функции, предложенные А.Хааром и впоследствии получившие название вейвлетов Хаара (НААР-вейвлетов), являются разрывными (рис. 1.1), но очень удобны для первоначального анализа:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 0,5 \\ -1, & 0,5 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$

В отличие от НААР-вейвлетов большинство вейвлетов, используемых на практике (особенно в анализе), непрерывны, многие из них ещё и дифферен-

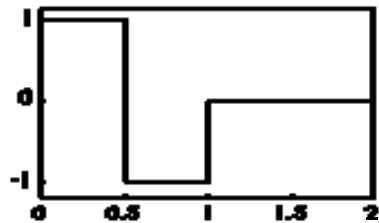


Рис. 1.1. График НААР-вейвлета

цируемы. Вейвлеты, используемые наиболее часто в приложениях и как математические объекты, обладают компактным носителем. Точное определение вейвлета, принятое в математической литературе, будет приведено чуть позже. Несколько упрощая, обычно под вейвлетами понимают функции, растяжения и сдвиги которых образуют набор функций, являющийся базисом в важных функциональных пространствах. Классические вейвлеты являются компактными как во временной, так и в частотной области.

Вейвлеты непосредственно связаны с многомасштабным анализом и обработкой сигналов различной природы. Предположим, что мы хотим изучить какой-то сигнал, например, временной ряд. Идея многомасштабного анализа состоит в том, чтобы взглянуть на сигнал при различных масштабах, условно говоря: сначала под микроскопом, после – через лупу, затем на расстоянии нескольких шагов, потом – совсем издалека. И при каждом масштабе рассмотрения вейвлет-анализ позволяет увидеть те особенности сигнала, которые характерны для данного масштаба, эффективно отфильтровывая влияние других масштабов.

Эта идея реализуется разными способами, но все они сводятся к последовательному огрублению той информации, которая дана изначально. Или можно подойти к задаче и с другой стороны – вначале рассматривают сильно огрубленный сигнал, а затем добавляют его особенности, появляющиеся при смене масштаба, анализируют особенности, которые имеются при различных масштабах и уточняют их положение.

Во-первых, такие подходы позволяют выявлять локальные особенности сигнала и классифицировать их по интенсивности. Например, в обработке изображений широко распространена многомасштабная локализация резких границ (multiscale edge detection). Очень резкие перепады яркости заметны и на малых, и на больших масштабах. В некоторых задачах границы объектов, присутствующих на изображении, являются наиболее информативной его частью, и требуется вычислять именно их с большой точностью, пренебрегая всем остальным. Вообще, подход последовательного уточнения чего-либо при переходе от крупного масштаба к мелкому возникает в самых разных областях обработки информации и прикладной математики. Например, применение многосеточных схем в вычислительной физике.

Во-вторых, таким образом визуализируется динамика изменения сигнала вдоль "оси масштабов". Если резкие скачки во многих случаях можно заметить невооруженным глазом, то взаимодействие событий на мелких масштабах, перерастающее в крупномасштабные явления, увидеть очень сложно. Например, промежуточно-асимптотическая фрактальная структура каких-либо границ или поверхностей бывает связана со статистической однородностью их строения на различных пространственных масштабах – автомодельностью. Скачки динамики по масштабной переменной могут нести не менее важную информацию, чем резкие изменения по времени или по пространству.



Рис. 1.2. Пример многомасштабного анализа изображения, в результате которого происходит распознавание и анализ образов самого объекта и конкретных важных его частей

Так, при анализе космических снимков земной поверхности выяснилось, что имеется несколько характерных масштабов, на которых фрактальные параметры меняются скачком. Так же и в экологии, и в экономике очень полезно выявлять ситуации, когда мелко-масштабная активность начинает влиять на крупномасштабную картину. Пример качественной зависимости информативности изображения от масштаба рассмотрения приведён на рис. 1.2 [17].

Термин **вейвлет** появился у А. Гроссмана и Ж. Морле в середине 80-х годов прошлого века в работах по анализу и цифровой обработке сейсмических и акустических сигналов. Само слово **"wavelet"**, является буквальным переводом на английский язык с французского слова **"ondelette"**, означающего небольшие волны, следующие друг за другом, рябь; в литературе встречается, однако, и

другой перевод – «маленькая волна», или «всплеск» – термин, использовавшийся одно время в отечественной литературе [10].

Математическая система аксиом, соответствующая алгоритму разложения по базисным функциям, предложенному А. Хааром, называется в настоящее время кратно-разрешающим (или кратно-масштабным) анализом. В 1986 году С. Маллат и И. Мейер сформулировали её в явном виде. С помощью этой системы аксиом в 1987 году И. Добеши построила бесконечную серию базисных функций – «вейвлетов», также обладающих основным свойством функций системы Хаара: компактным носителем. Эти вейвлеты определялись уже гладкими функциями. Аналогичные функции появились и в схеме фрактальной интерполяции дискретно заданных сигналов, предложенной С. Дюбуком в 1986 году и позднее подробно изучавшейся им совместно с Ж. Деслорье.

В формулировке самих аксиом кратно-разрешающего анализа принципиально важную роль сыграли наблюдения С. Маллат о связи вейвлетов с квадратурными зеркальными фильтрами, которые разрабатывались для цифровых телефонов в 1983 году, и пирамидальными схемами, которые использовались для обработки изображений примерно в это же время.

В последние десятилетия вейвлет-анализ и вейвлет-обработка цифровых сигналов и изображений сформировались в целое научное направление. «Современные вейвлеты» в зависимости от области их применения могут быть ортогональными, полуортогональными или биортогональными. Эти функции могут быть симметричными, асимметричными и несимметричными. Различают вейвлеты с компактной областью определения и просто быстро затухающие. Некоторые вейвлеты в качестве определения имеют аналитическое выражение, другие – быстрый алгоритм вычисления. Вейвлеты различаются также степенью гладкости. Для практики было бы удобно иметь наборы симметричных и асимметричных вейвлетов. Однако доказана теорема о том, что такими вейвлетами являются лишь вейвлеты Хаара. Функции Хаара не обладают достаточной гладкостью и не подходят для многих приложений, например, связанных с обработкой изображений, поэтому для кодирования изображений обычно используют биортогональные вейвлеты.

Вейвлет-анализ стали широко применять не только в классических областях, таких как анализ и обработка числовых рядов физических, геофизических и тому подобных результатов экспериментов и наблюдений. Широко используется он и при распознавании образов (изображение радужной оболочки глаза, рентгенограмм внутренних органов живых существ, спутниковые изображения облаков или поверхности планет, снимки минералов, при анализе и синтезе сигналов различной природы и структур (например, речи); при анализе кардиограмм, при диагностике острых лейкозов, при анализе состояния и прогнозирования развития ситуации на фондовых и валютных рынках; а также для решения задач обработки, сжатия, хранения и передачи больших объёмов информации, в том числе опять же аналогового и цифрового изображения (JPEG-2000) и видео (MPEG-4) [19].

Промежуточный метод исследования цифровых сигналов, позволяющий учесть локализацию сигнала и лежащий между классическим анализом Фурье и вейвлет-анализом, был предложен в 1946 году Габором. В нем используются тригонометрические функции Фурье, локализованные с помощью некоторой подвижной функции ("окна"), равной нулю вне определенного интервала — оконное преобразование Фурье (Short-Time Fourier Transform (STFT)).

В 1985 году И. Мейер обнаружил бесконечно дифференцируемую систему вейвлетов, порождающую ортонормированные базисы многих функциональных пространств\*. Хотя аналогичный базис был построен Стрембергом еще в 1981 году, именно открытие Мейера дало толчок серьезному пересмотру всех математических вопросов в этой области.

---

\* Любопытно, что математик Мейер познакомился с работой Гроссмана–Морле в очереди к ксероксу (аппарат был общим для физиков и математиков, и статью копировал физик) и мгновенно определил, что соответствующий формализм известен в теории интегральных операторов Кальдерона. Поняв принципиальную важность новых веяний, он тут же поездом приехал в Марсель и начал совместную работу с Гроссманом (статья Добеши, Гроссмана и Мейера была одной из первых математических работ новой теории). Впоследствии Мейер признавался, что стиль работы физиков, в частности их смелость в выработке рабочих гипотез и попытки решать задачи своими силами, был для него откровением. Математики, по его мнению, «слишком боятся ошибиться в своих умозаключениях».



Математическая формализация, данная работами Маллат и Мейер, привела к созданию теоретических основ вейвлет-анализа, названного мультиразрешающим (кратномасштабным) анализом.

Весомый вклад в теорию вейвлетов внесли Гуппилауд, Гроссман и Морле, сформулировавшие основы непрерывного вейвлет-преобразования (НВП или в английской аббревиатуре – SWT), Жан Олаф-Стромберг своими ранними работами по дискретным вейвлетам, Ингрид Добеши, разработавшая ортогональные вейвлеты (1988), Натали Делпрат, создавшая частотно-временную интерпретацию НВП (1991), Ньюланд, разработавший гармоническое вейвлет-преобразование, и многие другие.

В настоящее время специальные пакеты расширений по вейвлетам уже присутствуют в основных системах компьютерной математики (Matlab, Mathematica, Mathcad, и др.) или дополнениях к ним, а вейвлет-преобразования и вейвлетный анализ используются во многих областях науки и техники для самых различных задач: для распознавания образов, численного моделирования динамики сложных нелинейных процессов, анализа аппаратной информации и сигналов и изображений в медицине, космической технике, астрономии, геофизике, для эффективного сжатия сигналов и передачи информации по каналам с ограниченной пропускной способностью и т.п.

Многие исследователи называют вейвлет-анализ своеобразным "математическим микроскопом" для точного изучения внутреннего состава и структур неоднородных сигналов и функций.

Прежде, чем рассматривать математическую сущность вейвлет-анализа и вейвлет-преобразований рассмотрим кратко примеры результатов их применения к различным задачам и в различных ситуациях. Примеры, в основном, взяты из демонстрационного описания пакета wavelet-toolbox, включённого в МАТЛАБ-2006.

Наглядно различия между классическим фурье-преобразованием, оконным фурье-преобразованием и вейвлет-преобразованием демонстрируют рис. 1.3 [7].

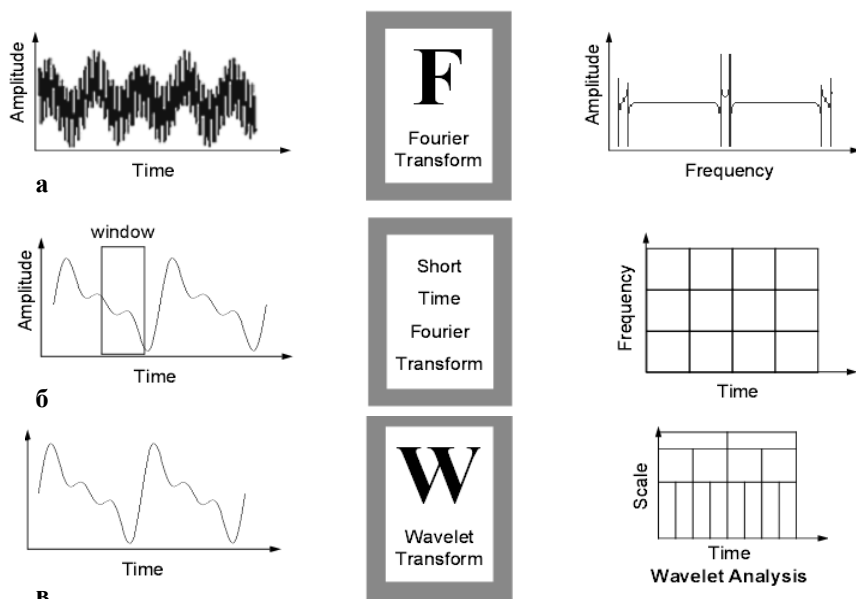


Рис. 1.3. Схематическое изображение исследования сигнала по преобразованием Фурье (а), оконным фурье-преобразованием (б) и вейвлет-преобразованием (в). Фурье-преобразование показывает амплитудно-частотную характеристику сигнала – наличие и амплитуду различных гармоник в сигнале. Оконное фурье-преобразование демонстрирует наличие гармоник в сигнале в заданном диапазоне движущегося вдоль временной оси окна. Вейвлет-преобразование демонстрирует масштабные сравнения сигнала с заданными базовыми вейвлетами в каждый момент времени существования сигнала

## 1.1. Обработка зашумлённого сигнала

### *Фильтрация шума в одномерном сигнале*

На рис. 1.4–1.7 приведены четыре примера применения вейвлет-преобразований для очистки от шума негармонических зашумлённых сигналов.

Результаты вейвлет обработки негармонических сигналов со значительным уровнем шумов приведены на рис. 1.4–1.5, где показан высокий уровень очистки шумов при незначительном искажении исходного сигнала.

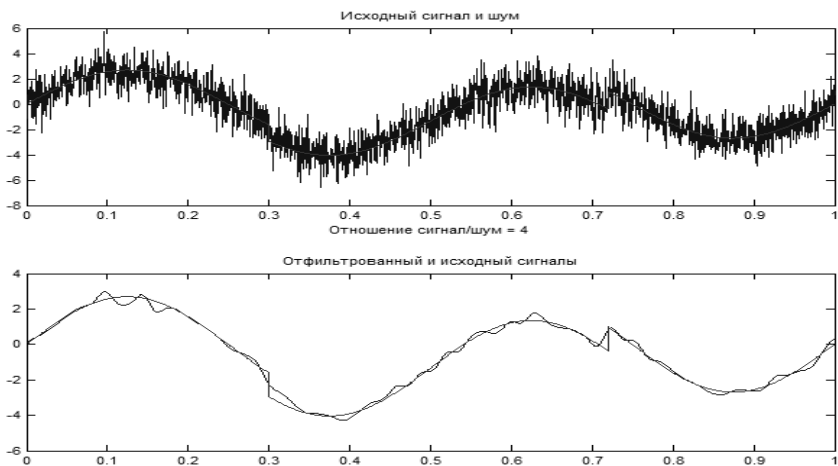


Рис. 1.4. Пример использования вейвлет-преобразования к зашумлённому квазигармоническому сигналу (кусоч синусоиды с изломами). Сверху: исходный сигнал с шумом, внизу: отфильтрованный от шума и исходный сигналы

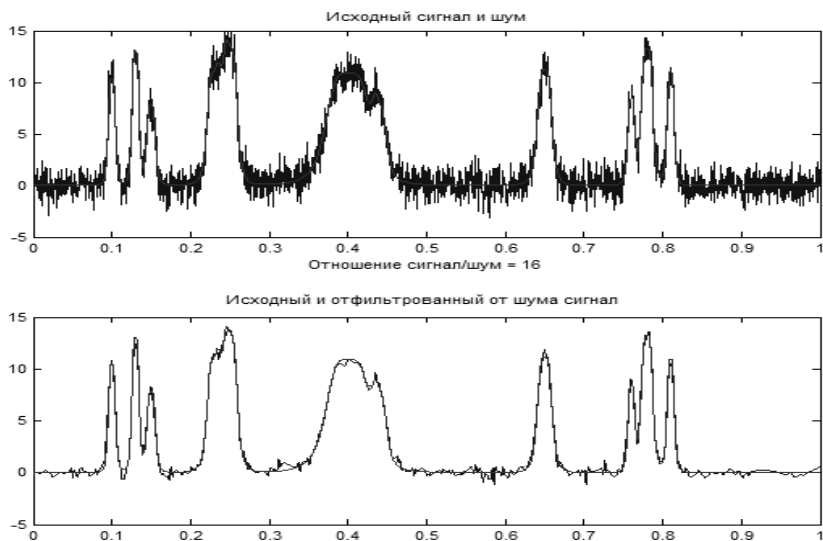


Рис. 1.5а. Пример использования вейвлет-преобразования к очистке зашумлённого сигнала, в котором присутствуют гладкие импульсы различной амплитуды и длительности. Вверху – сигнал с шумом, внизу – отфильтрованный и исходный сигналы

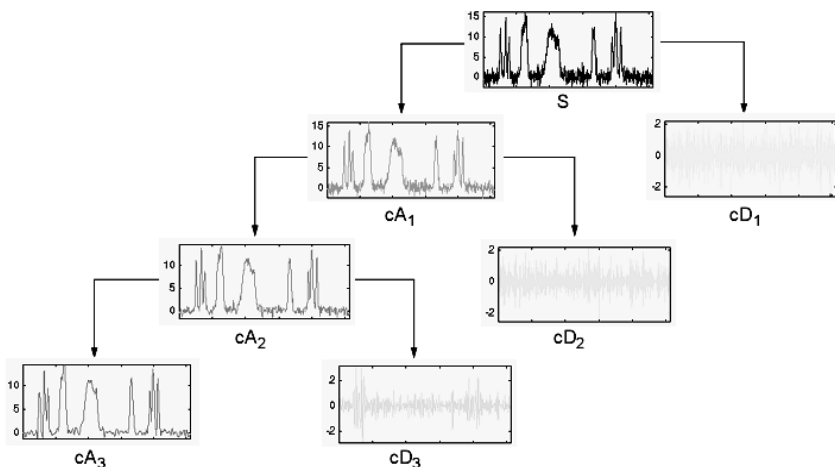


Рис. 1.56. Дерево последовательного разложения сигнала при фильтрации шума с помощью вейвлет-преобразования

Максимальный уровень искажения в отфильтрованном от шума сигнале по сравнению с исходным можно наблюдать вблизи скачков тестового сигнала (аналог эффекта Гиббса, проявляющегося так же и в фурье-анализе).

Наиболее впечатляющие результаты демонстрируются на рис. 1.6 и 1.7. В этих случаях в качестве тестового сигнала использованы сильно модулированные по амплитуде (изменения амплитуды на исследуемом промежутке в разы) и частоте (несколько порядков).

Из-за присутствия в тестовом сигнале скачков (рис. 1.6) и меняющейся в больших пределах частоты сигнала (рис. 1.7), что означает наличие непрерывного частотного спектра, получение удовлетворительной фильтрации методом преобразований Фурье крайне затруднительно.

### *Фильтрация шума в двумерном сигнале (изображении)*

Ниже приведены примеры (рис. 1.8) фильтрации шума в двумерном сигнале (плоском изображении). Вейвлет-преобразование изображений обладает свойством концентрирования энергии, т.е. позволяет сосредоточить полезную информацию о деталях изображения в относительно малом числе вейвлет-коэффициентов.

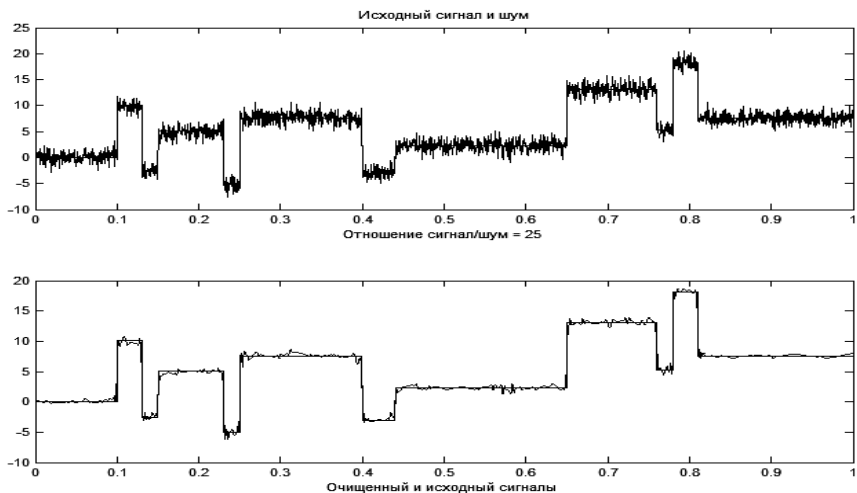


Рис. 1.6. Пример использования вейвлет-преобразования к зашумлённому сигналу, в котором присутствуют П-образные импульсы различной амплитуды и длительности. Вверху – сигнал с шумом, внизу – исходный и отфильтрованный с помощью вейвлет-преобразования сигналы

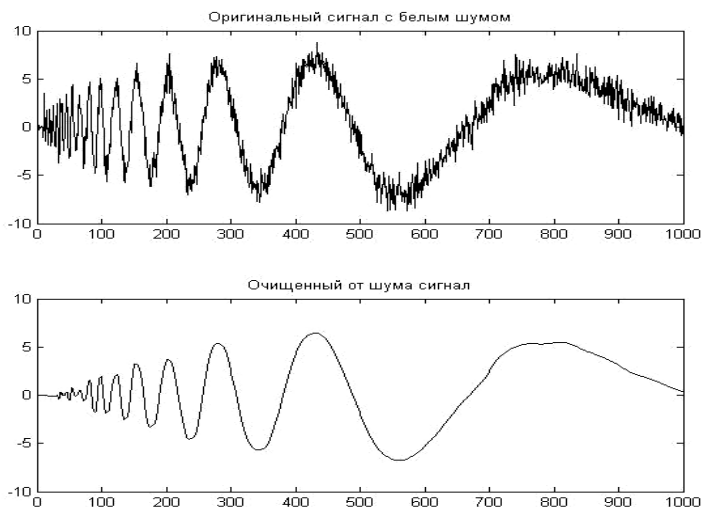


Рис. 1.7. Пример использования вейвлет-преобразования к зашумлённому квазигармоническому сигналу (с сильно меняющейся во времени амплитудой – в разы, и частотой – на порядки). Вверху – сигнал с шумом, достигающим вблизи минимума сигнала до 50 % его уровня, внизу – отфильтрованный сигнал с помощью вейвлет-преобразования

Поэтому можно обнулить (или подавить по амплитуде) большую часть остальных коэффициентов, которые (в предположении или по результатам предыдущих исследований) относятся к шуму, и затем провести обратное преобразование для восстановления обработанного изображения. Кроме того, вейвлет-преобразование позволяет подавлять шум в различных масштабах, включая низкочастотные, "крупные" шумы.

Используется следующий алгоритм: на тестовое изображение накладывался двухмерный шум, затем производятся разрезы зашумленного изображения в трёх направлениях: вертикальном, горизонтальном и диагональном и после оцифровки к полученным числовым рядам применяется вейвлет-преобразование. Восстановление образа после зануления коэффициентов перед неспецифическими для данного типа изображения членами ряда осуществляется обратным вейвлет-преобразованием. Результат применения данного алгоритма хорошо масштабируем – на рис. 1.8 приведён результат очистки от шума с помощью вейвлет-преобразования рисунка с уменьшенным вдвое характерным размером деталей.

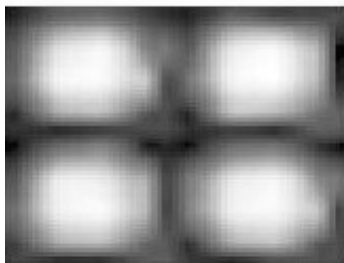
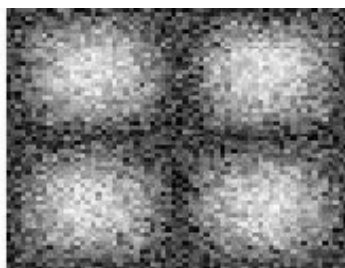
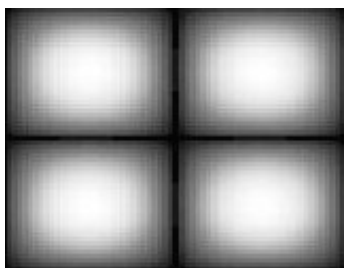


Рис. 1.8а. Пример фильтрации шумов в двухмерном изображении. Вверху – исходный (слева) и зашумлённый (справа) рисунки; внизу – рисунок с отфильтрованным шумом с помощью вейвлет-преобразования

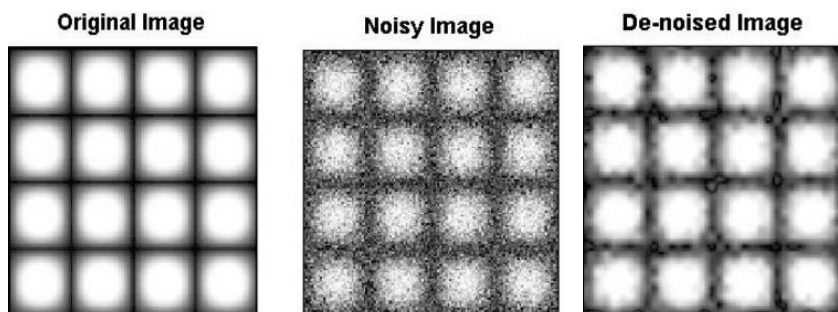


Рис. 1.86. Масштабируемость алгоритма фильтрации шумов в двухмерном периодическом изображении. Слева – исходный и зашумлённый (в центре) рисунки; справа – рисунок с отфильтрованным шумом с помощью вейвлет-преобразования

## 1.2. Выявление закономерностей

### *Выделение тренда в одномерном сигнале*

В примере, показанном на рис. 1.9, в исходном тестовом сигнале присутствуют две составляющие – пилообразный (с изломами) сигнал и квазилинейный сигнал, имеющий тренд. В результате вейвлет-преобразований тестовый сигнал разделён на составляющие, которые дают исходный сигнал в виде суммы.

## 1.3. Сжатие информации

### *Одномерный сигнал*

Сжатие информации, содержащейся в одномерных и в многомерных сигналах, возможно как с потерей несущественной информации (обычно коротковолновой, напоминающей шум), так и без потерь. На рис. 1.10 приведён пример сжатия одномерного массива информации с удалением коротковолновой части спектра.

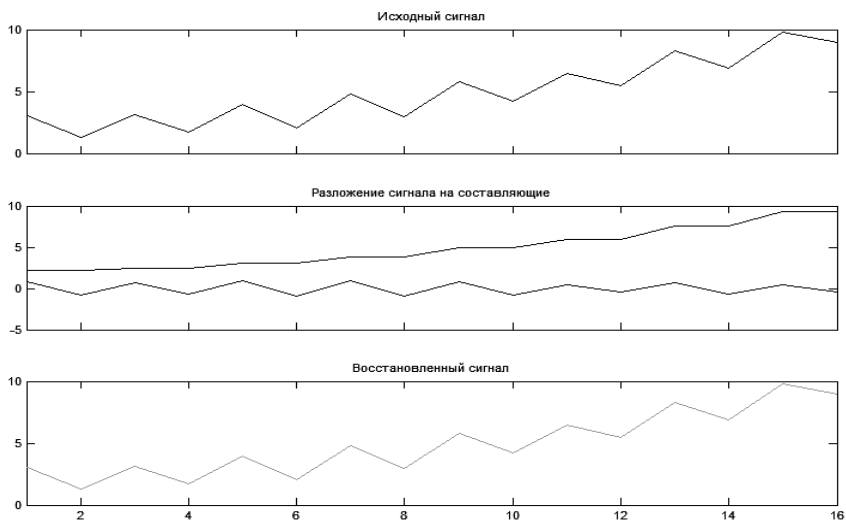


Рис. 1.9. Пример вейвлет-анализа пилообразного сигнала с трендом. Вверху – исходный сигнал, в середине – результат разложения исходного сигнала на основе вейвлет-преобразований (по алгоритму Маллата) на составляющие слагаемые, одно из которых с трендом, внизу – реконструированный сигнал

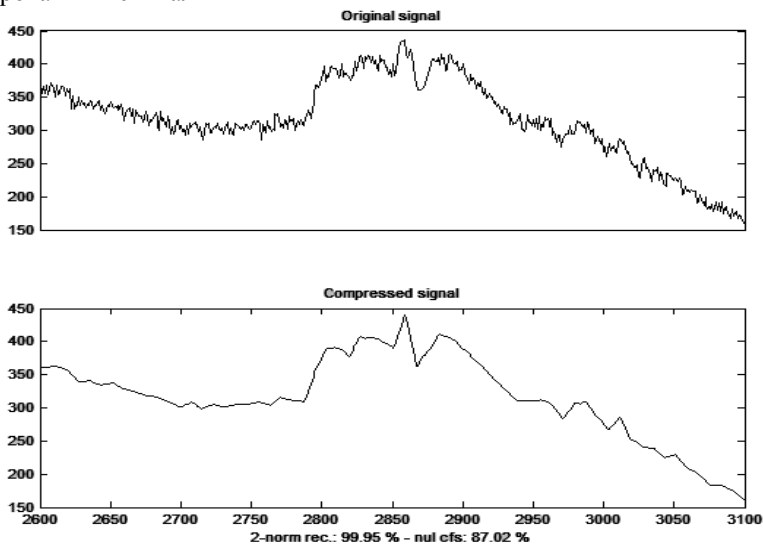


Рис. 1.10. Пример вейвлет-сжатия одномерного сигнала. Вверху – исходный сигнал, внизу восстановленный после сжатия (на ~ 90 %) сигнал



### *Двухмерный сигнал – фотография, рисунок, отпечаток*

Одна из областей использования вейвлет-преобразования – применение его для сжатия двухмерной информации, представляющей собой рисунок, фотографию и т.д. При этом обычно отфильтровывают коротковолновый сигнал, представляющий собой либо шум, либо информацию о мелких деталях, наличие которых в изображении не существенно, побочным эффектом такого сжатия информации является сглаживание изображения.

Преимущество вейвлетов по сравнению с другими алгоритмами сжатия изображения заключается, во-первых, в том, что вейвлет-алгоритмы работают с целым изображением, а не с его частью (т.е. изображение не разбивается на квадратики). Во-вторых, с их помощью легко анализировать прерывистые сигналы и сигналы с острыми всплесками, благодаря интегрированию, включённому в алгоритм. В-третьих, даже при 100-кратном вейвлет-сжатии изображения его качество почти не изменяется. Основная идея вейвлет-преобразования состоит в представлении некоторой случайной функции (в нашем случае исследуемого сигнала) как суперпозиции определенных базисных негармонических функций – вейвлетов. Для того чтобы вейвлеты аппроксимировали исходный сигнал, они подвергаются масштабированию (сжатию или растяжению) и сдвигу (смещению). Результат вейвлет-преобразования – обычный массив числовых коэффициентов, обработка которых хорошо алгоритмируется. После этого наступает этап порогового преобразования: отбрасываются коэффициенты, значение которых близко к нулю. При этом происходит необратимая потеря информации, ведь отброшенные коэффициенты участвуют в формировании изображения. Поэтому выбранное пороговое значение коэффициентов сильно влияет на качество изображения – задание слишком высокого порога повлечет за собой падение качества.

На рис. 1.11 и 1.12 приведены примеры исходных фотографий (слева) и восстановленных изображений (справа) после вейвлет-преобразования и удаления коротковолновой части информации, содержащейся в изображениях. На рис. 1.11 хорошо виден эффект уменьшения уровня шумов в результате двухмерного вейвлет-преобразования при сжатии изображения. На рис. 1.12 продемонстрирован пример сжатого вейвлет-преобразованием дактилоско-

пического изображения, на котором также удалена коротковолновая информация, представляющая собой малые и случайные изменения, несущественные при идентификации личности при дактилоскопии.

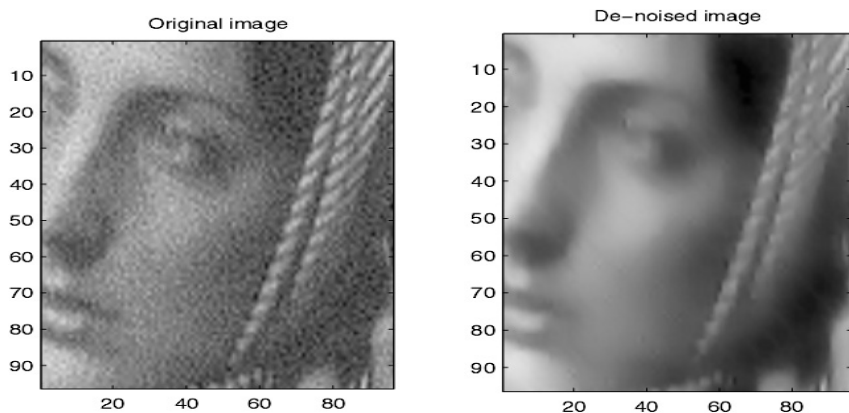


Рис. 1.11. Пример вейвлет-сжатия двумерного изображения. Слева – исходная фотография, справа – восстановленная фотография после сжатия с потерей коротковолновых функций

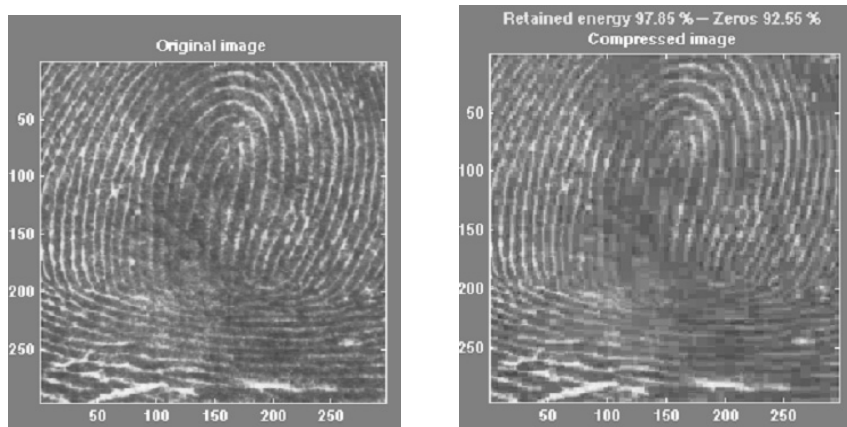


Рис. 1.12. Применение вейвлет-сжатия для хранения информации при дактилоскопии. Слева – исходное изображение, справа – восстановленное после сжатия (на 90 %)

## *Видеосигнал*

Применение вейвлет-преобразования для сжатия видеосигнала практически не отличается от алгоритма вейвлет-сжатия фотографий. Итак, видеокомпрессия происходит в два этапа – на первом осуществляется сжатие с потерей информации (вейвлет-преобразование), на втором – обычная архивация данных. Для восстановления информации необходимо произвести все действия в обратном порядке: сначала восстанавливаются значения коэффициентов, а затем по ним, применяя обратное вейвлет-преобразование, получают изображение (сигнал).

Вейвлет-преобразование легло в основу международных стандартов MPEG-4, JPEG2000, видеокодексов фирмы Analog Devices, стандарта на сжатие отпечатков пальцев ФБР (рис. 1.12).

### 1.4. Другие приложения

Кратко перечислим другие возможные приложения вейвлет-преобразований и вейвлет-анализа, часть из которых уже реализована.

Использование в задачах с прогнозом. Это – предсказание курса ценных бумаг на рынке, предсказание землетрясений, прогноз погоды, прогнозы в социологии и ранняя медицинская диагностика.

Вейвлеты успешно применяются в квантовой физике, при изучении строения атома, в лазерной технике.

Очистка от специфических шумов акустических сигналов. Так, ученые Стэнфорда с успехом применили вейвлеты для улучшения звучания старых грампластинок.

Решение задач, связанных с обнаружением сигнала на фоне активных и пассивных помех, с его распознаванием и классификацией. Сотрудниками Исследовательской лаборатории ВМС США вейвлеты применялись для обнаружения подводных лодок, для оценки разрушений, произведенных бомбардировками, и для других военно-прикладных задач.

### 1.5. Классические вейвлеты

Как мы уже отмечали, вейвлет-анализ последние десятилетия развивается в разных направлениях, и в зависимости от того, в ка-

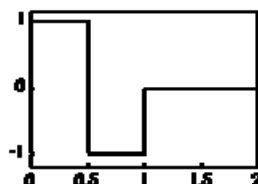
ких практических приложениях он используется, происходит выбор алгоритма вейвлет-преобразования и базовых вейвлетов.

В классическом фурье-анализе естественным образом в качестве базовых функций используются синусы и косинусы или в общем виде – комплексная экспонента. Были попытки использования других ортогональных функций (например, ортогональных полиномов) в качестве базисных функций для фурье-анализа, однако развитие это направление не имело в силу неочевидной интерпретации полученных результатов преобразований Фурье.

В вейвлет-анализе выбор базовых функций огромен и постоянно расширяется. На рис. 1.13 приведены самые популярные основные классические вейвлеты, с которых «всё начиналось», и применение которых в настоящее время наиболее упрощено благодаря включению вейвлет-преобразований в виде стандартных приложений в математические пакеты.

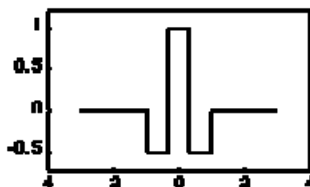
***Haar***-вейвлет:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$



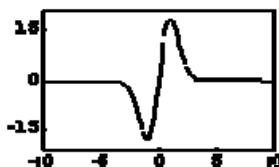
***Fhat***-вейвлет ("Французская шляпа" – French hat):

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & |t| < 1/3 \\ -0.5, & 1/3 < |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



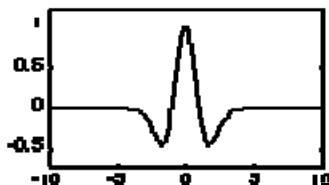
***Wave***-вейвлет:

$$\psi(t) = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



**Mhat**-вейвлет ("Мексиканская шляпа" – Mexican hat):

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



**Вейвлет Морле** (образует комплексный базис, изображена действительная часть):

$$\psi(t) = \exp\left(ik_0t - \frac{t^2}{2}\right)$$

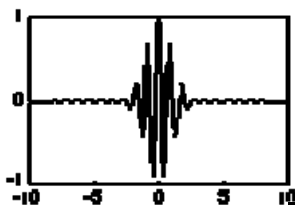


Рис. 1.13. Примеры часто используемых (классических) вейвлетов

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ (ОСНОВЫ ТЕОРИИ)

### 2.1. Преобразование Фурье (ПФ)

В основе спектрального анализа сигналов лежит интегральное преобразование и ряды Фурье.

Вообще, интегральные преобразования применяются к сигналу, чтобы получить о нем дополнительную информацию, которая во временном представлении явно не видна. Наиболее употребительным является преобразование Фурье. Это преобразование позволяет перевести амплитудно-временное представление в частотный спектр. Полученный спектр позволяет судить, например, есть ли какие-либо выделенные частоты в сигнале, каков частотный состав сигнала, а также сделать предварительную оценку, какие частоты могут "выжить", если, например, рассматривается задача о распространении сигнала в среде с различным коэффициентом поглощения для различных частот.

Если во временном представлении имеется зависимость амплитуды сигнала от времени, то, сделав преобразование Фурье, получим информацию об амплитуде сигнала с данной частотой. Необходимость знания такой информации может быть самой разной. Например, по электрокардиограмме врачи судят о наличии патологии именно в частотном представлении, поскольку во временном представлении эта информация практически не извлекаема.

Напомним некоторые математические определения и соотношения.

В пространстве действительных функций, заданных на конечном интервале  $(0, T)$ , норма – числовая характеристика произвольной функции  $f(t)$ , по определению может быть задана как квадратный корень из скалярного произведения функции на себя. В общем случае, для комплексных функций, квадрат нормы (условно говоря «энергия сигнала») соответствует выражению:

$$\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle = \int_0^T f(t) f^*(t) dt, \quad (2.1)$$

где  $f^*(t)$  – функция, комплексно сопряженная  $f(t)$ .

Если норма функции имеет конечное значение (интеграл сходится), то говорят, что функция принадлежит пространству функций, интегрируемых с квадратом:

$$f(t) \in L^2(R), \quad R = [0, T]$$

(пространство Гильберта), и имеет конечную энергию.

В пространстве Гильберта на основе совокупности ортогональных функций  $v_n(t)$  с нулевым скалярным произведением

$$\langle v_n(t), v_m(t) \rangle = \int_0^T v_n(t) v_m^*(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

всегда может быть создана система ортонормированных функций, образующих базис в пространстве. Ортонормированность функций означает, что норма каждой из функций  $v_n(t)$  системы равна единице:

$$\|v_n(t)\|^2 = \langle v_n(t), v_n(t) \rangle = \int_0^T v_n(t) v_n^*(t) dt = 1.$$

При этом любой сигнал (функция), принадлежащий этому пространству, может быть представлен в виде весовой суммы проекций сигнала на эти базисные функции:

$$s(t) = \sum_n S_n v_n(t). \quad (2.3)$$

Значения коэффициентов в разложении по базису определяются однозначно (в силу ортогональности базисных функций) скалярными произведениями сигнала с соответствующими базисными функциями. Действительно, умножив на  $v_m^*(t)$  обе части равенства (2.3) и проинтегрировав по области ортогональности, получим отличное от нуля слагаемое под знаком суммы только при  $m=n$ . Таким образом, для задания функции достаточно знать коэффициенты её разложения по ортогональному базису. При этом часть близких к нулю коэффициентов в разложении (2.3) при необходимости можно вообще отбросить и тем самым получить аппроксимацию исходной функции – возможный путь к дальнейшему сжатию информации, заложенной в функции.

Базис пространства может быть образован любой полной системой линейно независимых функций, но наиболее удобно, когда базисные функции ортонормированны, т.е. попарно ортогональны и с нормой равной единице. Наибольшее применение в спектральном анализе получила система комплексных экспоненциальных функций  $v_n(t) = \exp(-in\omega t)$ , здесь и далее  $i$  – мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$ . Проекции сигнала на данный базис определяются выражением:

$$S_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \exp(-in\omega t) dt, \quad n \in (-\infty, +\infty), \quad (2.4)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  – частотный аргумент векторов.

При известных выражениях базисных функций сигнал  $s(t)$  однозначно определяется совокупностью коэффициентов  $S_n$  и может быть абсолютно точно восстановлен (реконструирован) по этим коэффициентам:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \exp(in\omega t). \quad (2.5)$$

Уравнения (2.4) и (2.5) определяют прямое и обратное преобразования фурье-сигнала  $s(t)$ .

Для корректности разложение в ряд Фурье произвольной функции  $f(t)$  требуется, чтобы функция  $f(t)$  принадлежала этому же пространству  $L^2(0, T)$ , т.е. была бы квадратично интегрируема с «конечной энергией»:

$$\int_0^T |f'(t)|^2 dt < +\infty. \quad (2.6)$$

Любая такая функция гильбертова пространства может быть представлена в виде комплексного ряда Фурье (2.5), который называют спектральным представлением сигнала или его фурье-образом.

Произвольная функция  $f(t)$ , заданная на  $(0, T)$ , может быть периодически доопределена на всю числовую ось  $R(-\infty, \infty)$  так, что  $f(t) = f(t - T)$ ,  $t \in R$ , при условии сохранения конечности «энергии» в пространстве  $R(-\infty, \infty)$ .

На практике при вычислениях ряд фурье-сигнала  $s(t)$  ограничивается конечным количеством членов  $N$ . Ограничение числа членов ряда величиной  $N$  означает аппроксимацию бесконечно-мерного сигнала  $N$ -мерной системой базисных функций спектра обрезанного сигнала с определенной погрешностью в зависимости от фактического спектра сигнала.

Доказано, что ряд Фурье равномерно сходится к  $s(t)$  по норме (2.1), т.е. справедливо соотношение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| s(t) - \sum_{n=-N}^{n=+N} S_n \exp(in\omega t) \right\| = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, ряд Фурье – это разложение сигнала  $s(t)$  в ряд по базису пространства  $L^2(0, T)$  ортонормированных гармонических функций  $\exp(in\omega t)$  с изменением частоты, кратным частоте первой гармоники  $\omega_1 = \omega$ . Отсюда следует, что ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$  построен из одной функции  $v(t) = \exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$  с помощью масштабного преобразования независимой переменной так, что  $v_n(t) = v(nt)$ .



Доказано также, что для коэффициентов ряда Фурье справедливо равенство Парсеваля сохранения «энергии сигнала» в различных представлениях:

$$T^{-1} \int_0^T |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2. \quad (2.8)$$

## 2.2. «Недостатки» преобразования Фурье

Исходя из требований анализа произвольной функции, представления её совокупностью коэффициентов разложения по частотам и точного восстановления после преобразований, можно отметить определённые «недостатки» фурье-разложения сигналов при их исследовании, которые и привели к появлению вначале *оконного преобразования Фурье* и стимулировали в дальнейшем появление и развитие вейвлет-преобразования.

Основными «недостатками» можно назвать следующие.

1. Недостаточная информативность при анализе нестационарных сигналов и практически полное отсутствие возможностей анализа их особенностей (сингулярностей), так как в частотной области происходит «размазывание» особенностей сигналов (разрывов, ступенек, пиков и т.п.) по всему частотному диапазону спектра. Появляются «паразитные» высокочастотные составляющие, явно отсутствующие в исходном сигнале при наличии в нём скачков и разрывов.

2. Гармонические базисные функции разложения не способны в принципе отображать перепады сигналов с бесконечной крутизной типа прямоугольных импульсов, так как для этого требуется бесконечно большое число членов ряда. При конечном числе членов ряда Фурье в окрестностях скачков, разрывов и т.п. в восстановленном сигнале возникают значительные осцилляции – явление Гиббса (Gibbs phenomenon).

3. Преобразование Фурье отображает общие сведения о частотах исследуемого сигнала в целом и не дает представления о локальных свойствах сигнала при быстрых временных изменениях его спектрального состава. Так, преобразование Фурье не отличает сигнал с суммой двух синусоид (стационарный сигнал) от сигнала с двумя последовательно следующими синусоидами с теми же час-

тотами (нестационарный сигнал), так как спектральные коэффициенты (2.4) вычисляются интегрированием по всему интервалу задания сигнала. Классический алгоритм преобразования Фурье в принципе не предоставляет возможности анализировать частотные характеристики сигнала в произвольные моменты времени.

Напомним, что, используя преобразование Фурье, можно работать с сигналом либо только во временной области, либо только в частотной. Одновременно получить частотно-временное представление, используя классический алгоритм преобразования Фурье, нельзя (отсутствует возможность получения информации о том, какие частоты присутствуют в сигнале в данный момент времени). Для стационарного сигнала эта информация и не требуется, поскольку частотные составляющие сигнала и их амплитуды на любом временном интервале идентичны.

Рассмотрим в качестве характерного примера сигнал, состоящий из набора конечного числа гармоник, например, в наиболее простом случае – две гармоники 10 и 50 Гц (рис. 2.1–2.4).

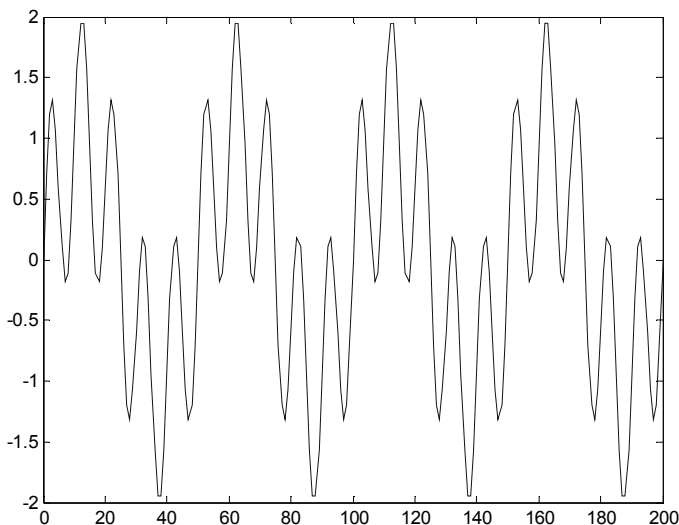


Рис. 2.1. Стационарный сигнал, представляющий собой сумму двух синусоид с частотой 10 и 50 Гц

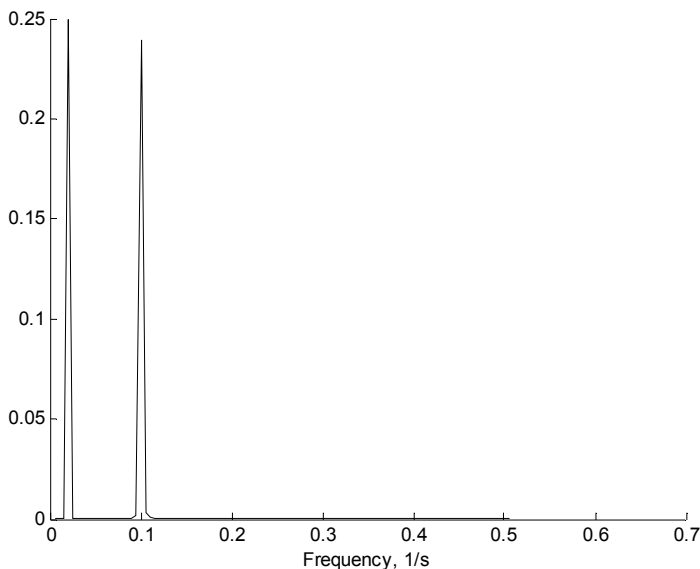


Рис. 2.2. Спектральная характеристика сигнала, представленного на рис. 2.1

Этот сигнал стационарен в том смысле, что частоты, в нем содержащиеся, не меняются во времени. Его спектральная характеристика приведена на рис. 2.2. Как и следовало ожидать, видны два пика, в идеале представляющие собой  $\delta$ -функции.

Теперь для сравнения рассмотрим нестационарный сигнал. Для простоты рассмотрим сигнал, в котором присутствуют те же самые частоты, что и в упомянутом примере, но эти частоты встречаются на различных временных интервалах (рис. 2.3). То есть на первой половине временного интервала в сигнале присутствует только одна частота (10 Гц), на следующей половине — тоже только одна частота, но другая (50 Гц).

Рассмотрим спектр этого нестационарного сигнала (рис. 2.4). На рисунке чётко видны две частоты. "Ложные частоты" имеют небольшую амплитуду, и они появляются из-за наличия скачка значения функции и её производной в момент смены частоты. Не считая этих частот, как и на рис. 2.2, видны две основные гармоники, присутствующие в исходном сигнале.

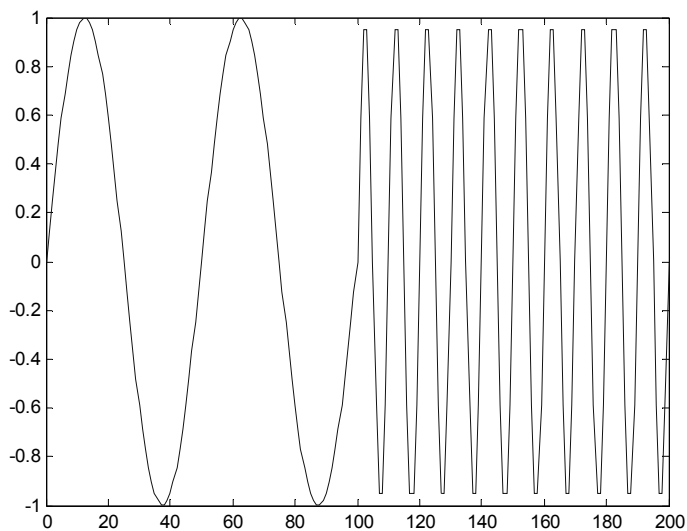


Рис. 2.3. Нестационарный сигнал, содержащий синусоиды 10 Гц и 50 Гц на различных временных интервалах

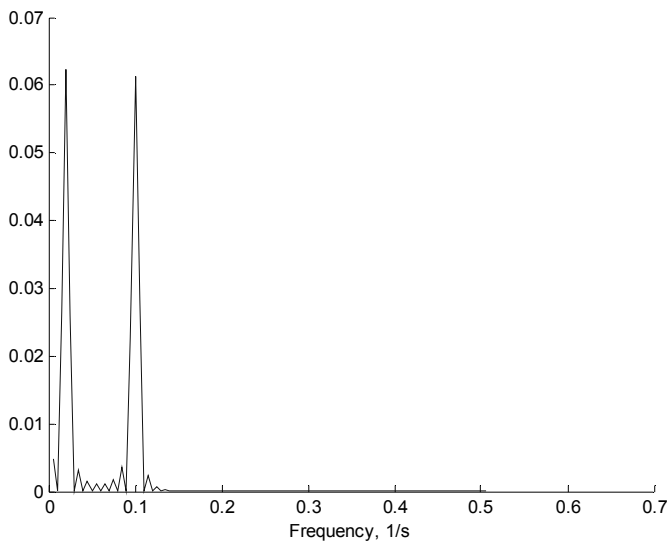


Рис. 2.4. Спектральная характеристика нестационарного сигнала, содержащего синусоиды 10 и 50 Гц

Таким образом, отличия в спектральных характеристиках рассмотренных двух сигналов незначительны: присутствуют ложные частоты малых амплитуд в нестационарном сигнале (рис. 2.2 и 2.4).

Рассмотренный пример показывает, что по своей сути преобразование Фурье дает представление о том, какие частоты в спектре сигнала присутствуют, но не может ответить на вопрос, каково время существования спектральных составляющих сигнала. Для временной локализации спектральных компонентов необходимо сконструировать частотно-временное представление сигнала. Эту задачу в некоторой степени может решить так называемое *оконное преобразование Фурье*, однако наиболее полно её решает вейвлет-преобразование.

### 2.3. Оконное преобразование Фурье (ОПФ)

В случае применения оконного преобразования Фурье вводится движущаяся вдоль независимой переменной (пространство или время) оконная функция, имеющая компактный носитель. Ширина окна выбирается в несколько раз меньше длительности сигнала. Временной интервал сигнала разделяется на подынтервалы (дискретные или непрерывные в зависимости от заданного алгоритма скольжения оконной функции). Преобразование Фурье выполняется последовательно для каждого подынтервала в отдельности. Тем самым осуществляется переход к частотно-временному (или частотно-координатному) представлению сигналов, при этом в пределах каждого подынтервала сигнал предполагается стационарным. Результатом ОПФ является семейство спектров, которым отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Это позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов. Размер носителя оконной функции  $w(t)$  (ширина окна) обычно устанавливается соизмеримым с предполагаемыми длительностями особенностей сигнала. В результате ОПФ сопоставляет исходному сигналу функцию двух переменных – частоты и положения окна (временное или координатное). При этом для получения результатов, позволяющих характеризовать свойства исследуемого сигнала, необходимо в ОПФ заложить априори размер стационарности сигнала.

Оконное преобразование выполняется в соответствии с выражением:

$$S(\omega, b_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)w^*(t - b_k)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.9)$$

Комплексная функция  $w^*(t - b_k)$  представляет собой функцию окна сдвига преобразования по координате  $t$ , где параметром  $b_k$  задаются фиксированные значения сдвига. При сдвиге окон с равномерным шагом значения  $b_k = k\Delta b$ . В качестве окна преобразования могут использоваться как простейшее прямоугольное окно ( $w(t) \equiv 1$  в пределах окна и 0 за его границами), так и специальные весовые окна (Бартлетта, Гаусса, Кайзера и пр.), выбираемые из условия внесения наименьших искажений спектра граничными условиями вырезки оконных отрезков сигналов, а также нейтрализующие явление Гиббса.

Для каждого положения окна на временной оси сигнала вычисляется свой комплексный спектр. Эффективная ширина оконной функции сохраняется постоянной по всему интервалу исследуемого сигнала. Таким образом, ширина носителя оконной функции ограничивается как сверху (должна быть в разы меньше длительности всего сигнала или, как минимум, участков стационарности), так и снизу (должна превышать в полтора-два раза характерную минимальную длину волны на участках стационарности, чтобы ОПФ смогло «почувствовать» наличие волны в спектре сигнала). В рассматриваемом примере (рис. 2.3, 2.4) частичного удаления ложных частот можно достигнуть лишь в узком изменении ширины носителя оконной функции (ширины окна) в пределах 60–80 единиц (см. рис. 2.3).

На рис. 2.5 приведён пример [13] анализа временного нестационарного сигнала с большим уровнем шумов на комплексе MATHCAD с помощью оконного преобразования Фурье.

По спектру сигнала в целом можно судить о наличии в его составе гармонических колебаний на трех частотах. Оконное преобразование не только подтверждает данное заключение (на рис. 2.5 это —  $Sw_1$ ,  $Sw_2$ ,  $Sw_3$ ), но и показывает конкретную локальность колебаний по интервалу сигнала и соотношение между амплитудами этих колебаний.

Разрешающая способность оконного преобразования вдоль координаты определяется шириной оконной функции и обратно пропорциональна частотной разрешающей способности. При ширине оконной функции, равной  $b$ , частотная разрешающая способность определяется значением  $\omega = 2\pi/b$ . При требуемой величине частотного разрешения  $\omega$  ширина оконной функции соответственно должна быть равна  $b = 2\pi/\omega$ . Для оконного преобразования Фурье эти ограничения являются принципиальными. Так, для рис. 2.5 при размере массива данных  $N = 300$  и ширине оконной функции  $\Delta b = 100$  частотная разрешающая способность результатов преобразования уменьшается в  $N/\Delta b = 3$  раза по сравнению с исходными данными, и графики  $S\omega(n\omega_{sw})$  по координате  $n$  для наглядного сопоставления с графиком  $S(n\omega_s)$  построены с шагом по частоте  $\omega_{sw} = 3\omega_s$ , т.е. по точкам  $n = 0, 3, 6, \dots, N$ .

Оконное преобразование Фурье позволяет в целом выявить информацию, заключённую в изучаемом сигнале как по времени, так и по частоте. Разрешающая способность локализации особенностей сигнала имеет ограничения, которые заложены в самой логике алгоритма и определяются условием, аналогичным принципу неопределённости Гейзенберга в квантовой механике. Из требований, накладываемых на ширину окна, следует, что невозможно получить точное частотно-временное представление сигнала, т.е. нельзя определить для конкретного момента времени, какие спектральные компоненты присутствуют в сигнале. Чем короче окно, тем точнее разрешение по времени, но хуже разрешение по частоте, и наоборот. Кроме того, чем короче окно, тем более справедливым становится заложенное в логику алгоритма предположение о стационарности сигнала в пределах окна.

## 2.4. Непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования (НВП и ДВП)

Гармонические базисные функции преобразования Фурье предельно локализованы в частотной области (до импульсных функций Дирака при  $T \rightarrow \infty$ ) и не локализованы во временной (они определены во всем временном интервале от  $-\infty$  до  $\infty$ ).

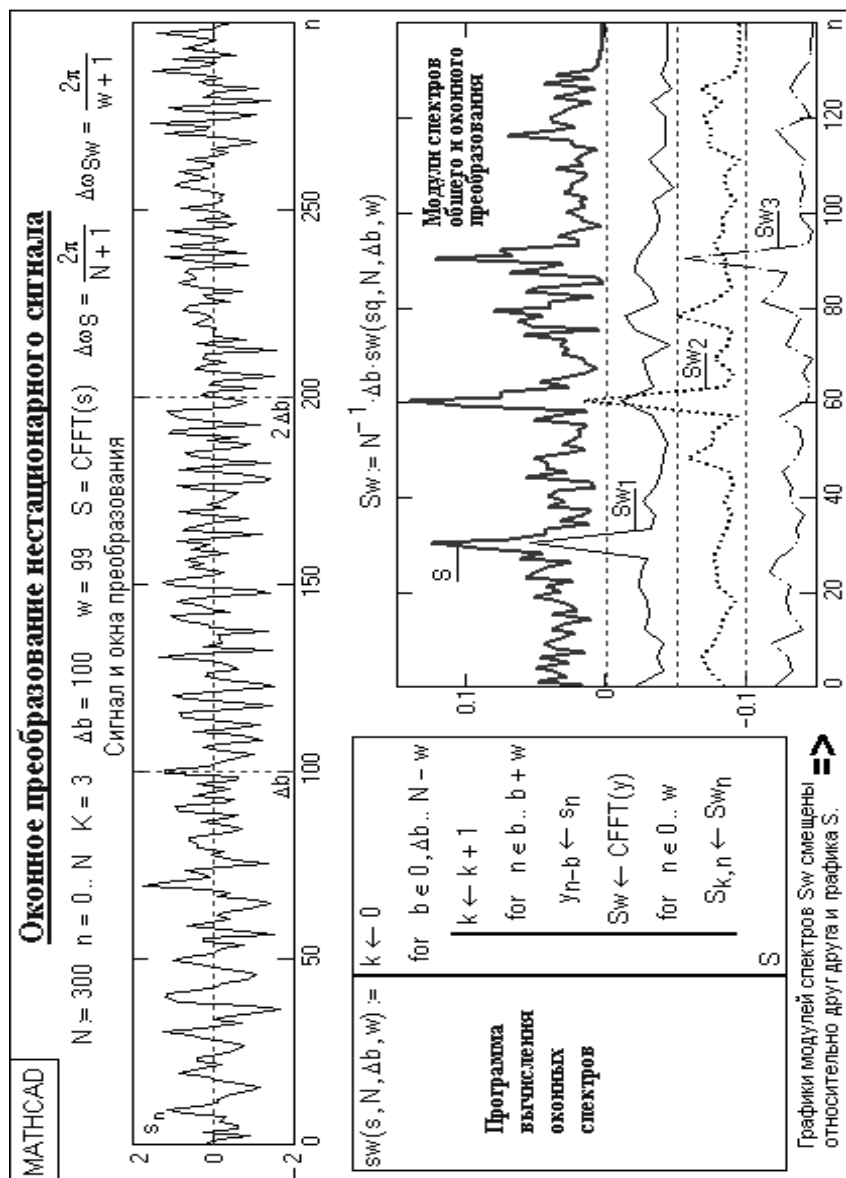


Рис. 2.5. Пример анализа сигнала с высоким уровнем шума с использованием оконного фурье-преобразования [13]



Противоположностью гармоническим базисным функциям являются импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера, которые предельно локализованы во временной области и "размыты" по всему частотному диапазону.

Вейвлеты по локализации в этих двух представлениях можно рассматривать как функции, занимающие промежуточное положение между гармоническими и импульсными функциями. Они должны быть локализованными как во временной, так и в частотной области представления. При создании таких функций опять имеет значение принцип, аналогичный принципу неопределенности Гейзенберга, который связывает эффективные значения длительности функций и ширины их спектра. Чем точнее осуществлять локализацию временного положения функции, тем шире будет становиться ее спектр, и наоборот, что наглядно видно на рис. 2.6 и 2.7, где приведены Мхат-вейвлет и вейвлет Морле без сдвига при различных коэффициентах растяжения и им соответствующий спектр.

Особенностью вейвлет-анализа является то, что в нем можно использовать большое число основных вейвлет-функций, реализующих различные варианты соотношения между частотой и локализацией при анализе сигнала. Поэтому при исследовании имеется возможность выбора между семействами вейвлетных функций и гибкого применения тех, которые наиболее эффективно решают конкретную задачу.

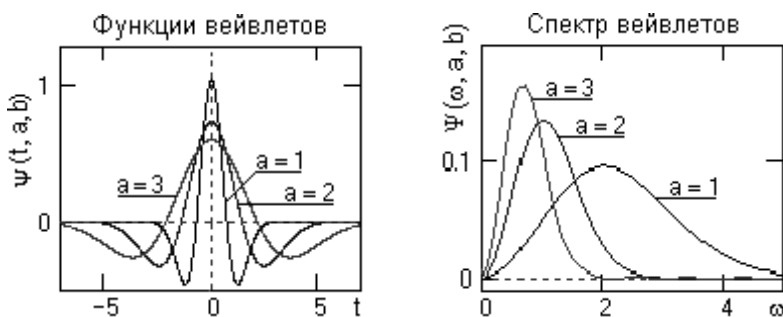


Рис. 2.6. МНАТ-вейвлет без сдвига при трёх коэффициентах растяжения (слева) и соответствующие спектры (справа)

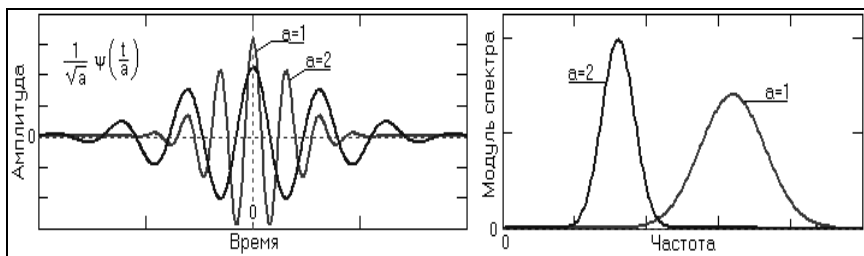


Рис. 2.7. Вейвлет Морле без сдвига при двух коэффициентах растяжения (слева) и соответствующие спектры (справа)

Вейвлетный базис пространства обычно конструируют из порождающей функции, принадлежащей этому же пространству, которая быстро стремится к нулю на бесконечности. В частности – из финитной функции, т.е. функции с компактным носителем. Для того, чтобы из такой порождающей функции  $\psi(t)$  сформировать базис  $L^2(R)$ , вводят два преобразования независимой переменной:

1) преобразование сдвига выбранной функции  $\psi(t)$ , которое обеспечивает покрытие финитной функцией  $\psi(t)$  всей числовой оси  $R(-\infty, \infty)$ :  $\psi(t) \Rightarrow \psi(t + k)$ ,

2) преобразование масштабного сжатия/расширения, которое обеспечивает самоподобие базисных функции на разных масштабах представления и требуемое покрытие спектра сигнала:  $\psi(t) \Rightarrow \psi(a^m t)$ ,  $a = \text{const}$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ .

Если параметры  $m$  и  $k$  действительные числа – получается непрерывное вейвлет-преобразование, если же  $m$  и  $k$  – целочисленны, то получается дискретное вейвлет-преобразование.

Если одновременно учитывать оба условия, структура семейства базисных функций задаётся преобразованием:

$$\psi(t) \Rightarrow \psi(a^m t + k). \quad (2.10)$$

Для упрощения дальнейших выкладок значения переменных  $m$  и  $k$  примем пока целочисленными. Приведение функции (2.10) к единичной норме даёт нормирующий коэффициент при базисных функциях:

$$\psi_{mk}(t) = a^{m/2} \psi(a^m t + k). \quad (2.11)$$

Если для семейства функций  $\psi_{mk}(t)$  выполняется условие ортогональности:

$$\langle \psi_{nk}(t), \psi_{lm}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{nk}(t) \cdot \psi_{lm}^*(t) dt = \delta_{nl} \cdot \delta_{km}, \quad (2.12)$$

то семейство  $\psi_{mk}(t)$  может использоваться в качестве ортонормированного базиса пространства  $L^2(R)$ . В этом случае произвольная функция пространства  $L^2(R)$  может быть разложена по базису  $\psi_{mk}(t)$ , т.е. представлена в виде ряда:

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk} \psi_{mk}(t), \quad (2.13)$$

где коэффициенты  $S_{mk}$  представления сигнала – это проекции сигнала на ортогональный базис функций  $\psi_{mk}(t)$ , как и в преобразовании Фурье, определяются скалярным произведением

$$S_{mk} = \langle s(t), \psi_{mk}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad (2.14)$$

при этом ряд равномерно сходится, т.е. справедливо равенство:

$$\lim_{M, K \rightarrow \infty} \|s(t) - \sum_{v=-M}^M \sum_{k=-K}^K S_{mk} \psi_{mk}(t)\| = 0.$$

При выполнении этих условий базисная функция преобразования  $\psi(t)$  называется *ортгональным вейвлетом*.

Простейшим примером ортогональной системы функций такого типа являются функции Хаара. Базисная функция Хаара определяется соотношением

$$\psi(t) = \begin{cases} +1, & 0 < t < 1/2; \\ -1, & 1/2 < t < 1; \\ 0, & t < 0, t > 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

Легко проверить, что при  $a = 2$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  две любые функции, полученные с помощью этого базисного вейвлета путем масштабных преобразований и переносов, имеют единичную норму и взаимно ортогональны. На рис. 2.8 приведены примеры функций для первых трех значений  $m$  и  $b$  при различных их комбинациях, где ортогональность функций видна наглядно.

Спектр, соответствующий вейвлет-базису, в отличие от спектра Фурье является двухмерным и определяет двухмерную поверхность в пространстве переменных  $m$  и  $k$  ( $a$  и  $b$  в случае непрерывного преобразования).

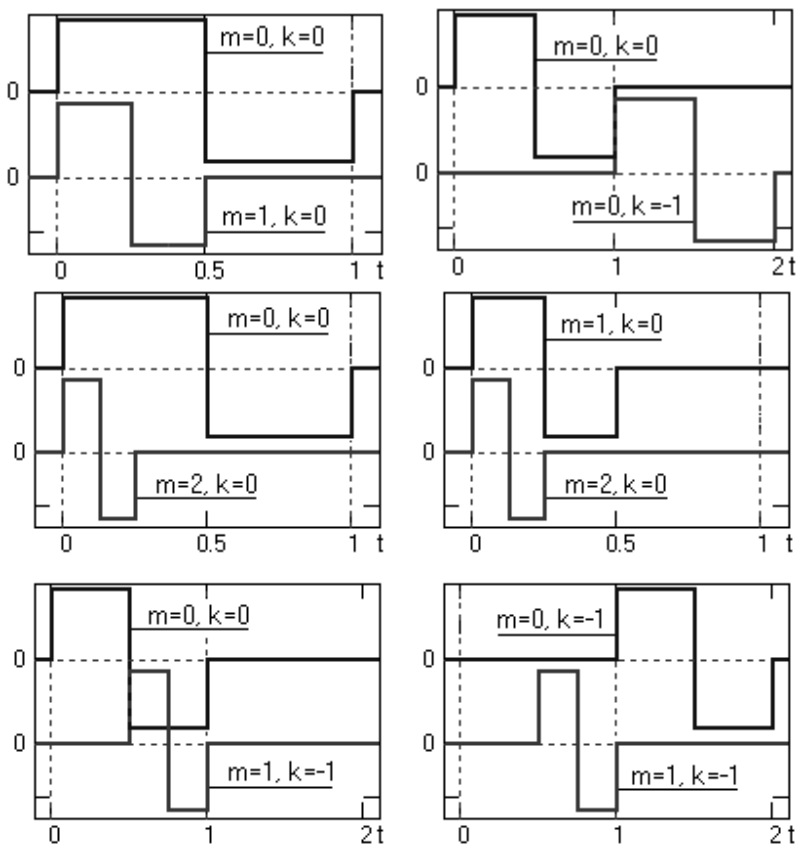


Рис. 2.8. Функции Хаара при различных параметрах  $m$  и  $k$

При графическом представлении параметр растяжения/сжатия спектра  $m$  откладывается по оси ординат, параметр локализации  $k$  по оси абсцисс – оси независимой переменной сигнала. Сам же спектр обычно рисуется в виде линий уровня на плоскости переменных  $m$  и  $k$ , часто для дополнительной наглядности – в цвете.

Приведём для сравнения вейвлет-преобразование обсуждаемого ранее примера с двумя гармониками. ВП суммы двух гармоник (10 и 50 Гц) и тех же гармоник, действующих на двух последовательных интервалах, изображены на рис. 2.9, 2.10.

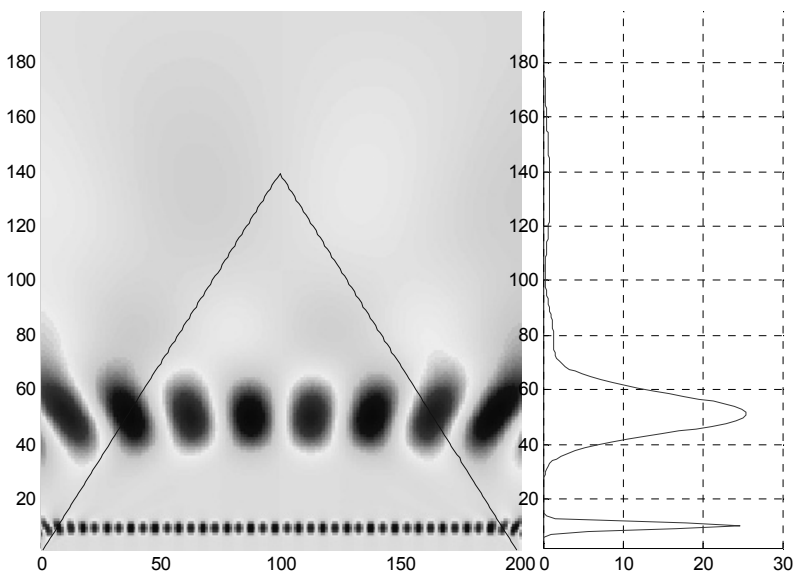


Рис. 2.9. Вейвлет-преобразование стационарного сигнала, состоящего из набора двух гармоник

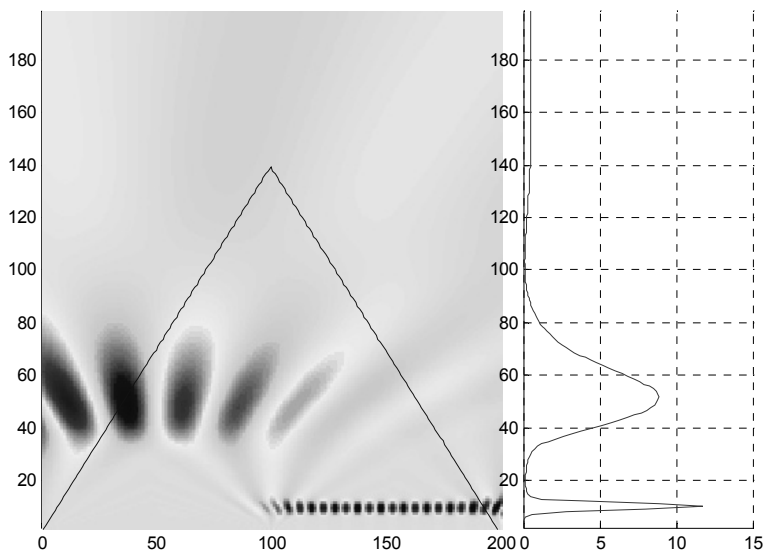


Рис. 2.10. Вейвлет-преобразование нестационарного сигнала, состоящего из последовательного включения двух гармоник

Рассмотрим теперь подробнее процесс вейвлетного разложения сигнала на примере разложения сигнала  $s(t)$  вейвлетом Хаара с тремя последовательными по масштабу  $m$  вейвлетными функциями с параметром  $a = 2$ , при этом сам сигнал  $s(t)$  образуем суммированием этих же вейвлетных функций с одинаковой амплитудой с разным сдвигом от нуля, как это показано на рис. 2.11.

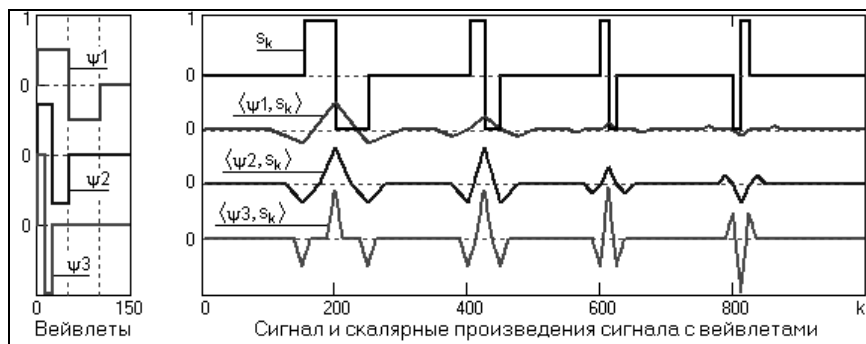


Рис. 2.11. Скалярные произведения сигнала с вейвлетами

Для выбранного начального значения масштабного коэффициента сжатия  $m$  определяется функция вейвлета (функция  $\psi_1(t)$  на рис. 2.11), и вычисляется скалярное произведение сигнала с вейвлетом  $\langle \psi_1(t), \psi_s(t + k) \rangle$  с аргументом по сдвигу  $k$ . Результаты вычисления скалярных произведений на рис. 2.11 построены по центрам вейвлетных функций (т.е. по аргументу  $k$  от нуля со сдвигом на половину длины вейвлетной функции). Максимальные значения скалярного произведения отмечаются в сигнале там, где локализована эта же вейвлетная функция. После построения первой масштабной строки разложения меняется масштаб вейвлетной функции ( $\psi_2$  на рис. 2.11) и выполняется вычисление второй масштабной строки спектра и т.д.

Как видно на рис. 2.11, чем точнее локальная особенность сигнала совпадает с соответствующей функцией вейвлета, тем эффективнее выделение этой особенности на соответствующей масштабной строке вейвлетного спектра. Нетрудно видеть также, что для сильно сжатого вейвлета Хаара характерной хорошо выделяемой локальной особенностью является скачок сигнала, причем выделяется не только скачок функции, но и направление скачка.

Способы графического представления результатов вейвлет-преобразования могут быть самыми различными. Вейвлет-спектр  $W_{\psi}(a, b)$  представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Вид поверхности определяет изменения во времени спектральных компонентов различного масштаба и называется частотно-временным спектром. Вместо пространственного изображения поверхности часто используются:

- (1) её проекция на плоскость с изображением линий уровня (изоуровней с применением цветной или чёрно-белой шкалы), которые позволяют проследить изменения интенсивностей коэффициентов вейвлет-преобразования на разных временных масштабах,
- (2) картины локальных экстремумов поверхностей, так называемый *скелетон*, выделяющий структуру локализации минимумов и максимумов анализируемого сигнала.

На рис. 2.12 приведен пример графического отображения нестационарного модельного сигнала – набор последовательно включающихся гармоник частотой 30, 20, 10 и 5 Гц (слева) и поверхность спектра его непрерывного вейвлет-преобразования (справа).

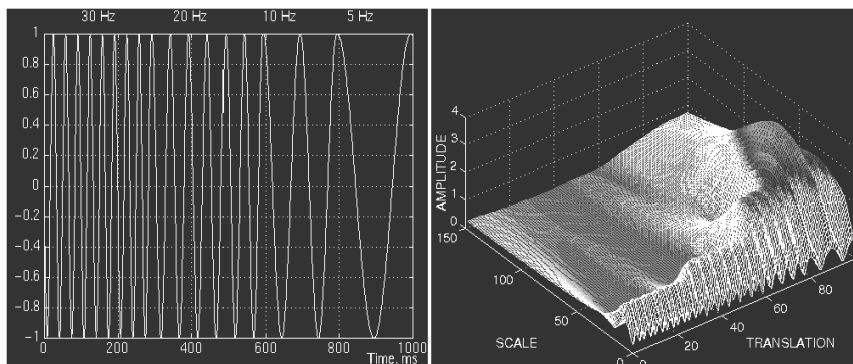


Рис. 2.12. Нестационарный модельный сигнал, последовательного включения гармоник частотой 30, 20, 10 и 5 Гц (слева) и соответствующая поверхность его непрерывного вейвлет преобразования – частотно-временной спектр (справа)

На рис. 2.13 приведен пример графического отображения изоуровней вейвлетной поверхности реального физического процесса [15], [16]. Здесь изображен типичный временной ход доплеров-

ского сдвига частоты, проходящего через ионосферу сигнала, и его вейвлет-спектр. Видно наличие в спектре сигнала высокочастотного компонента (мелкомасштабные чередующиеся области экстремумов в верхней части рисунка). Эти возмущения объясняются турбулентными пульсациями в ионосферной плазме. Встречающиеся в картине коэффициентов ветвления линий уровня говорят, по-видимому, о фрактальной природе возмущений.

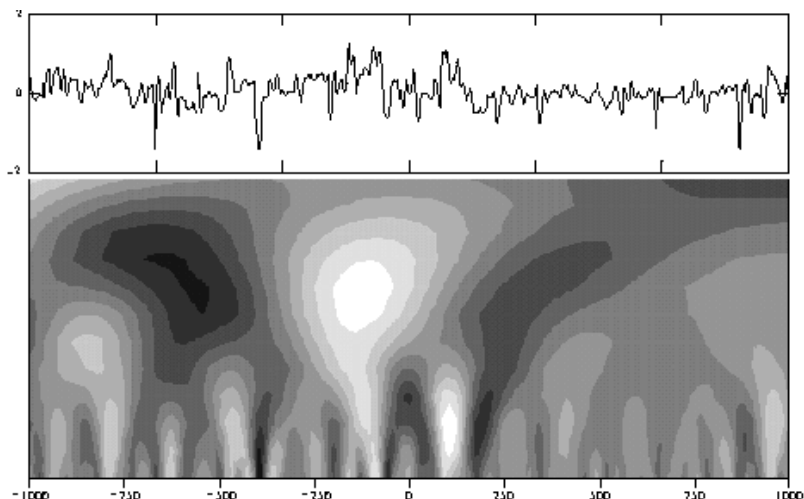


Рис. 2.13. Пример доплеровского сдвига частоты проходящего через ионосферу сигнала и его вейвлет-спектра

В общем случае, однако, в основе вейвлет-преобразований лежит использование двух непрерывных, взаимозависимых и интегрируемых по независимой переменной функций.

- Вейвлет-функция  $\psi(t)$  –  $\psi$ -функция времени с нулевым значением интеграла и частотным фурье-образом  $\Psi(\omega)$ . Этой функцией, которую обычно и называют вейвлетом, выделяются детали сигнала и его локальные особенности. В качестве анализирующих вейвлетов обычно выбираются функции, хорошо локализованные и во временной, и в частотной области.

- Масштабирующая функция  $\phi(t)$  – временная скейлинг-функция  $\phi$  с единичным значением интеграла, с помощью которой выполняется грубое приближение (аппроксимация) сигнала.



Эти  $\phi$ -функции присущи не всем, а, как правило, только ортогональным вейвлетам. Они необходимы для преобразования нецентрированных и достаточно протяженных сигналов при раздельном анализе низкочастотных и высокочастотных составляющих.

**Непрерывное вейвлет-преобразование** (НВП, CWT-Continuous Wavelet Transform) обеспечивается непрерывными изменениями обоих параметров преобразования: сдвига и масштабирования.

Допустим, имеются функции  $s(t)$  с конечной энергией (нормой) в пространстве  $L^2(R)$ , определенные по всей действительной оси  $R(-\infty, \infty)$ . Для финитных сигналов с конечной энергией средние значения сигналов, как и любых других функций из пространства  $L^2(R)$ , должны стремиться к нулю на  $\pm\infty$ .

Непрерывным вейвлет-преобразованием (или вейвлетным образом) функции  $s(t) \in L^2(R)$  называют функцию двух переменных:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi(a, b, t) dt, \quad a, b \in R, \quad a \neq 0. \quad (2.16)$$

где вейвлеты  $\psi(a, b, t) \equiv \psi_{ab}(t)$  – масштабированные и сдвинутые копии порождающего вейвлета  $\psi(t) \in L^2(R)$ , совокупность которых создает базис пространства  $L^2(R)$ .

Коэффициенты вейвлет-преобразования  $C(a, b)$  содержат комбинированную информацию об анализируемом сигнале и об используемом вейвлете. Поэтому результаты вейвлет-анализа в значительной степени зависят от выбора порождающей вейвлет функции, что, с одной стороны, даёт исследователю некоторую степень произвола, но, с другой стороны, усложняет интерпретацию результатов вейвлет-преобразования.

Порождающими могут быть самые различные функции с компактным носителем – ограниченные по времени и местоположению на временной оси и имеющие спектральный образ, в определенной степени локализованный на частотной оси.

Как и для рядов Фурье, базис пространства  $L^2(R)$  целесообразно конструировать из одной порождающей функции, норма которой должна быть равна единице. Как мы уже отмечали, для перекрытия локальной функцией вейвлета всей временной оси пространства используется операция сдвига (смещения по временной оси):  $\psi(b, t) = \psi(t - b)$ , где значение  $b$  для НВП является величиной непрерывной. Для перекрытия всего частотного диапазона простран-

ства  $L^2(R)$  используется операция временного масштабирования вейвлета с непрерывным изменением независимой переменной:

$$\psi(a, t) = |a|^{-1/2} \psi(t/a).$$

На рис. 2.6 и 2.7 видно, что если временной образ вейвлета будет расширяться (с изменением значения параметра 'a'), то его "средняя частота" будет понижаться, а частотный образ (частотная локализация) перемещаться на более низкие частоты.

Таким образом, путем непрерывного сдвига по независимой переменной  $(t - b)$  вейвлет имеет возможность перемещаться по всей числовой оси произвольного сигнала, а путем непрерывного изменения масштабной переменной 'a' (в фиксированной точке  $(t - b)$  временной оси) "просматривать" частотный спектр сигнала по определенному интервалу окрестностей этой точки.

С использованием этих операций вейвлет-базис функционального пространства образуется путем масштабных преобразований и сдвигов порождающего вейвлета  $\psi(t)$ :

$$\psi(a, b, t) = |a|^{-1/2} \psi[(t - b)/a], \quad a, b \in R, \quad a \neq 0, \quad \psi(t) \in L^2(R). \quad (2.17)$$

Нормы вейвлетов  $\psi(a, b, t)$  равны норме  $\psi(t)$ , что обеспечивает нормировочный множитель  $|a|^{-1/2}$ . При нормировке к единице порождающего вейвлета  $\psi(t)$  все семейство вейвлетов также будет нормированным. Если при этом выполняется требование ортогональности функций, то функции  $\psi(a, b, t)$  будут представлять собой ортонормированный базис пространства  $L^2(R)$ .

Понятие масштаба вейвлет-преобразования имеет аналогию с масштабом географических карт. Большие значения масштаба соответствуют глобальному представлению сигнала, а низкие значения масштаба позволяют различить детали. Низкие частоты тогда соответствуют глобальной информации о сигнале (распределенность на всей его протяженности), а высокие частоты – детальной информации и особенностям сигнала, которые имеют малую протяженность, т.е. масштаб вейвлета как единица шкалы частотно-временного представления сигналов обратно пропорционален частоте. Масштабирование как математическая операция расширяет или сжимает сигнал. Большие значения масштабов соответствуют расширению сигнала, а малые значения – сжатию.

Отметим, что значения параметра  $a > 1$  расширяют сигнал, в то время как значения  $a < 1$  сжимают его, так как в определении вейвлета коэффициент масштаба  $a$  стоит в знаменателе

Процедура преобразования стартует с масштаба  $a = 1$  и продолжается при увеличивающихся значениях параметра  $a$ , т.е. анализ начинается с высоких частот и проводится в сторону низких частот. Первое значение ' $a$ ' соответствует наиболее сжатому вейвлету. При увеличении значения ' $a$ ' вейвлет расширяется. Вейвлет помещается в начало сигнала ( $t = 0$ ), перемножается с сигналом, интегрируется на интервале своего задания и нормируется. При задании четных или нечетных функций вейвлетов результат вычисления  $C(a, b)$  помещается в точку ( $a = 1, b = 0$ ) масштабно-временного спектра преобразования. Сдвиг  $b$  может рассматриваться как время с момента  $t = 0$ , при этом координатная ось  $b$ , по существу, повторяет временную ось сигнала.

Для полного включения в обработку всех точек входного сигнала требуется задание начальных (и конечных) условий преобразования (определенных значений входного сигнала при  $t < 0$  и  $t > t_{\max}$  на полуширину окна вейвлета). При одностороннем задании вейвлетов результат относится, как правило, к временному положению средней точки окна вейвлета.

На следующем шаге алгоритма вейвлет масштаба  $a = 1$  сдвигается вправо на значение  $b$  и процедура повторяется. Получается значение, соответствующее  $t = b$  в строке  $a = 1$  на частотно-временном плане. Процедуру повторяем до тех пор, пока вейвлет не достигнет конца сигнала, и получаем строку точек на масштабно-временном плане для масштаба  $a = 1$ .

Для вычисления следующей масштабной строки значение  $a$  увеличивается на некоторое значение. При НПВ в аналитической форме приращения параметров  $\Delta b \rightarrow 0$  и  $\Delta a \rightarrow 0$ . При выполнении преобразования в компьютере осуществляется дискретизация масштабно-временной плоскости: вычисляется аппроксимация с увеличением обоих параметров с заданным конечным шагом.

Начальное значение масштабного коэффициента может быть и меньше 1. Для детализации самых высоких частот сигнала минимальный размер окна вейвлета не должен превышать периода самой высокочастотной гармоник. Если в сигнале присутствуют спектральные компоненты, соответствующие текущему значению

$a$ , то интеграл произведения вейвлета с сигналом в интервале, где этот спектральный компонент присутствует, дает относительно большое значение. В противном случае – произведение мало или равно нулю, так как среднее значение вейвлетной функции равно нулю. С увеличением масштаба вейвлета (ширины эффективного окна) преобразование выделяет все более низкие частоты.

Отметим ещё раз, что в отличие от оконного преобразования Фурье вейвлет-преобразование при аналогичных дискретных значениях сдвигов  $b$  дает семейства спектров масштабных коэффициентов  $a$  сжатия/растяжения

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)|a|^{-1/2}\psi_0[(t-b)/a]dt.$$

Если считать, что каждый вейвлет имеет определенную "ширину" своего временного окна, которому соответствует определенная "средняя" частота спектрального образа вейвлета, обратная его масштабному коэффициенту  $a$ , то семейства масштабных коэффициентов вейвлет-преобразования можно считать аналогичными семействам частотных спектров оконного преобразования Фурье, но с одним принципиальным отличием.

Масштабные коэффициенты изменяют "ширину" вейвлетов и, соответственно, "среднюю" частоту их фурье-образов, а, следовательно, каждой частоте соответствует своя длительность временного окна анализа, и наоборот. Так, малые значения параметра  $a$ , характеризующие быстрые составляющие в сигналах, соответствуют высоким частотам, а большие значения (соответствующие медленным изменениям сигнала) – низким частотам. За счёт изменения масштаба вейвлеты способны выявлять различия на разных частотах, а за счёт сдвига (параметр  $b$ ) проанализировать свойства сигнала в разных точках на всём исследуемом временном интервале. Можно говорить о том, что «многомасштабное» временное окно вейвлет-преобразования адаптировано для оптимального выявления низкочастотных и высокочастотных характеристик сигналов.

В общем случае НВП значения параметров ' $a$ ' и ' $b$ ' в выражениях (2.16) и (2.17) являются непрерывными, а множество базисных функций – избыточным. В силу этого непрерывное преобразование сигналов содержит очень большой объем информации. Сигналу, определенному на  $R$ , соответствует вейвлетный спектр на  $R \times R$ . С позиций сохранения объема информации при преобразованиях

сигналов отсюда следует, что вейвлетный спектр НПВ имеет огромную избыточность.

**Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП, DWT – Discrete Wavelet Transform).** При обработке данных на компьютере может выполняться дискретизированная версия непрерывного вейвлет-преобразования с заданием дискретных значений параметров ( $a$ ,  $b$ ) вейвлетов с произвольным шагом  $\Delta a$  и  $\Delta b$ . В результате получается избыточное количество коэффициентов, намного превосходящее число отсчетов исходного сигнала, которое не требуется для реконструкции сигналов.

Главным достоинством дискретного вейвлет-преобразования является возможность быстрого вейвлет-преобразования с пирамидальным алгоритмом вычислений. Однако возможности быстрого вейвлет-преобразования могут быть реализованы не для всех типов вейвлетов.

Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) обеспечивает достаточно информации как для анализа сигнала, так и для его синтеза, являясь вместе с тем значительно более экономным, чем НПВ по числу операций и по требуемой памяти. ДВП оперирует с дискретными значениями параметров  $a$  и  $b$ , которые задаются, как правило, в виде степенных функций:

$$a = a_0^{-m}, \quad b = k \cdot a_0^{-m}, \quad a_0 > 1, \quad m, \quad k \in Z,$$

где  $Z$  – множество целых чисел  $\{-\infty, \infty\}$ ,  $m$  – параметр масштаба,  $k$  – параметр сдвига. Базис пространства  $L^2(R)$  в дискретном представлении:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), \quad m, \quad k \in I, \quad \psi(t) \in L^2(R) \quad (2.18)$$

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{m/2} \psi(a_0^m t - k), \quad m, \quad k \in Z, \quad \psi(t) \in L^2(R).$$

Вейвлет-коэффициенты прямого преобразования:

$$C_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{mk}(t) dt. \quad (2.19)$$

Значение ' $a$ ' может быть произвольным, но обычно принимается равным 2, при этом преобразование называется *диадным вейвлет-преобразованием*. Для диадного преобразования разработан быстрый (пирамидальный) алгоритм вычислений, аналогичный быстрому преобразованию Фурье, что предопределило его широкое использование при анализе массивов цифровых данных.

Обратное дискретное преобразование для непрерывных сигналов при нормированном ортогональном вейвлетном базисе пространства описывается выражением:

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{mk} \psi_{mk}(t). \quad (2.20)$$

Число использованных вейвлетов по масштабному коэффициенту  $m$  задает уровень декомпозиции сигнала, при этом за нулевой уровень ( $m = 0$ ) обычно принимается уровень максимального временного разрешения сигнала, т.е. сам сигнал, а последующие уровни ( $m < 0$ ) образуют ниспадающее вейвлет-дерево. В программном обеспечении вычислений (например в пакете MATLAB) для исключения использования отрицательной нумерации по  $m$  знак 'минус' обычно переносится непосредственно в выражение (2.18), т.е. используется следующее представление базисных функций:

$$\psi_{mk}(t) = |a_0|^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - k), \quad m, k \in I, \quad \psi(t) \in L^2(R). \quad (2.18')$$

Для дискретного вейвлет-преобразования существование обратного преобразования определяется с помощью неравенства Рисса.

Функция  $\psi(t) \in L^2(R)$  называется  $R$ -функцией, если базис на ее основе по формуле (2.18) является базисом Рисса. Для базиса Рисса существуют две положительные вещественные константы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , такие, что  $0 < \mathbf{A} \leq \mathbf{B} < \infty$ , для которых выполняется соотношение

$$\mathbf{A} \|C_{mk}\|^2 \leq \left\| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{mk} \psi_{mk}(t) \right\|^2 \leq \mathbf{B} \|C_{mk}\|^2,$$

если энергия ряда  $C_{mk}$  конечна. При этом для любой  $R$ -функции существует базис  $\psi_{mk}^{\#}(t)$ , который ортогонален базису  $\psi_{mk}(t)$ . Его называют биортогональным базисом (ортогональным "двойником") базиса  $\psi_{mk}(t)$ , таким, что

$$\langle \psi_{mk}(t), \psi_{nl}^{\#}(t) \rangle = \delta_{mn} \cdot \delta_{kl}.$$

Если  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = 1$  и  $a_0 = 2$ , то семейство базисных функций  $\{\psi_{mk}(t)\}$  является ортонормированным базисом и возможно полное восстановление исходного сигнала, при этом  $\psi_{mk}(t) \equiv \psi_{mk}^{\#}(t)$  и для реконструкции сигналов используется формула (2.18). Если  $\psi(t)$  не ортогональный вейвлет, но имеет "двойника", то на базе "двойника" вычисляется семейство  $\psi_{mk}^{\#}(t)$ , которое и используется при обрат-

ном преобразовании вместо  $\psi_{mk}(t)$ . При этом точное восстановление исходного сигнала не гарантировано: оно будет близко к нему в среднеквадратическом смысле.

Как и для непрерывного вейвлет-преобразования, обратное дискретное преобразование (2.18) не может выполнить восстановление нецентрированных сигналов в силу нулевого первого момента вейвлетных функций и, соответственно, центрирования значения вейвлет-коэффициентов  $C_{mk}$  при прямом вейвлет-преобразовании. Поэтому при обработке числовых массивов данных дискретные вейвлеты используются, как правило, в паре со связанными с ними дискретными скейлинг-функциями. Скейлинг-функции имеют с вейвлетами общую область задания и определенное соотношение между значениями, но первый момент скейлинг-функций по области определения равен единице. Например, порождающая скейлинг-функция вейвлета Хаара задается следующим выражением:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 0, & t < 0, \ t > 1. \end{cases}$$

При обозначении скейлинг-функций индексом  $\varphi_{mk}(t)$  аналитика скейлинг-функций повторяет выражения (2.16) и (2.17) и образует дополнительный базис пространства  $L^2(R)$ . Сумма вейвлет-коэффициентов и скейлинг-коэффициентов разложения сигналов дает возможность выполнять точную реконструкцию сигналов, при этом вместо выражения (2.18) используется следующее выражение обратного вейвлет-преобразования:

$$s(t) = \hat{s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C a_k \varphi_k(t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C d_{mk} \psi_{mk}(t), \quad (2.21)$$

где  $C a_k$  – скейлинг-коэффициенты, которые обычно называют коэффициентами аппроксимации сигнала,  $C d_{mk}$  – вейвлет-коэффициенты или коэффициенты детализации.

## 2.5. Обратное вейвлет-преобразование

Так как форма базисных функций  $\psi(a, b, t)$  зафиксирована, то вся информация о сигнале в выражении (2.16) переносится на значения функции  $C(a, b)$ . Точность обратного интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбора базисного вейвлета и способа

построения базиса, т.е. от значений базисных параметров  $a, b$ . Строго теоретически вейвлеты могут считаться базисными функциями  $L^2(R)$  только в случае их *ортogonalности*. В этом случае обратное преобразование определено однозначно.

Для практических целей непрерывного преобразования часто бывает вполне достаточно устойчивости и "приблизительной" ортогональности системы разложения функций. Под устойчивостью понимается достаточно точная для практического применения реконструкция произвольных сигналов.

Для ортонормированных вейвлетов обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса, что и прямое:

$$s(t) = (1/C_\Psi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1/a^2) C(a, b) \psi(a, b, t) da db, \quad (2.22)$$

где  $C_\Psi$  – нормализующий коэффициент

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} (|\Psi(\omega)|^2 / \omega) d\omega < \infty. \quad (2.23)$$

Условие конечности  $C_\Psi$  ограничивает класс функций, которые можно использовать в качестве вейвлетов. В частности, при  $\omega = 0$ , для обеспечения сходимости интеграла (2.22) в нуле значение  $\Psi(\omega)$  должно быть равно нулю. Это обеспечивает условие компактности фурье-образа вейвлета в спектральной области с локализацией вокруг некоторой частоты  $\omega_0$  – средней частоты вейвлетной функции. Следовательно, функция  $\psi(t)$  должна иметь нулевое среднее значение по области его определения (интеграл функции по аргументу должен быть нулевым):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Однако это означает, что не для всех сигналов возможна их точная реконструкция вейвлетом  $\psi(t)$ , так как при нулевом первом моменте вейвлета коэффициент передачи постоянной составляющей сигнала в преобразовании (2.22) равен нулю.

Кроме того, даже при выполнении условия (2.21) далеко не все типы вейвлетов могут гарантировать реконструкцию сигналов как таковую. Однако и такие вейвлеты могут быть полезны для анализа особенностей сигналов как дополнительного метода к другим методам анализа и обработки данных. В общем случае, при отсутст-



вии строгой ортогональности вейвлетной функции (2.16) для обратного преобразования применяется выражение:

$$s(t) = (1/C_\Psi) \int_R (1/a^2) C(a,b) \Psi^\#(a, b, t) da db, \quad (2.22')$$

где индексом  $\Psi^\#(a, b, t)$  обозначен ортогональный "двойник" базиса  $\Psi(a, b, t)$  (биортогональный базис).

## 2.6. Простейшие примеры вейвлет-преобразования

Вейвлетный анализ является частотно-пространственным или частотно-временным анализом сигналов. Непрерывное вейвлет-преобразование представляет собой разложение сигнала по всем возможным сдвигам и сжатиям/растяжениям некоторой локализованной финитной функции – вейвлета. При этом переменная 'a' определяет масштаб вейвлета и эквивалентна частоте в преобразованиях Фурье, а переменная 'b' – сдвиг вейвлета по сигналу от начальной точки в области его определения, шкала которого полностью повторяет временную шкалу анализируемого сигнала.

Если вейвлет-преобразование выполняется для анализа сигналов и выявления в них каких-либо особенностей и места локализации этих особенностей и обратной реконструкции не требуется, то допускает применение любых типов вейвлетов, как ортогональных, так и неортогональных. Чаще всего для этих целей используются вейвлеты симметричные или несимметричные.

Удобными для практического применения при анализе сигналов являются семейства вейвлетов, сконструированные на основе производных от функции Гаусса. Они имеют наилучшую локализацию как во временной, так и в частотной областях. В общей форме уравнение базового вейвлета:

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1} d^n [\exp(-x^2/2)] / dx^n, \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

Уравнения этих базовых вейвлетов для первых четырех производных имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= -x \exp(-x^2/2), \\ \psi_2(x) &= (1 - x^2) \exp(-x^2/2), \\ \psi_3(x) &= (3x - x^3) \exp(-x^2/2), \\ \psi_4(x) &= (-4x^4 + 6x^2 - 3) \exp(-x^2/2). \end{aligned}$$

Уравнения нормированных базисов для временных сигналов:

$$\psi(t, a, b) = (K_n / \sqrt{2}) \psi_n(x), \quad x = (t - b)/a,$$

$$K_1 = 1,062, \quad K_2 = 0,867, \quad K_3 = 0,548, \quad K_4 = 0,293.$$

Для сужения базовой формы вейвлетов применяется также упрощенная форма:

$$\psi_n(x) = (-1)^{n+1} d^n [\exp(-x^2)] / dx^n, \quad n \geq 1.$$

**Wave-вейвлет** вычисляется по первой производной ( $n = 1$ ) от функции Гаусса и приведен на рис. 2.14 во временной и частотной области для трех значений масштабных коэффициентов 'a'. Вейвлет относится к нечетным функциям и, соответственно, спектр вейвлета является мнимым. Уравнение нормированного Wave-вейвлета имеет вид

$$\psi(t, a, b) = \frac{-1,786}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t-b}{a} \cdot \exp \left[ -\left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \right]. \quad (2.25)$$

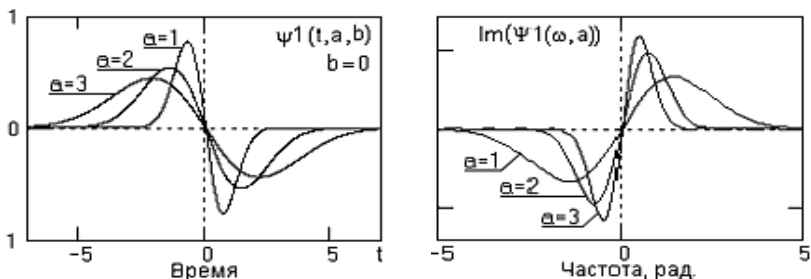


Рис. 2.14. Wave-вейвлет во временной и частотной областях

**Mhat-вейвлет** вычисляется по второй производной ( $n = 2$ ) и приведен на рис. 2.15. Вейвлет представляет собой чётную функция, её график симметричен. Спектр вейвлета представлен только действительной частью и хорошо локализован по частоте, нулевой и первый моменты вейвлета равны нулю. Уравнение нормированного Mhat-вейвлета

$$\psi(t, a, b) = \frac{1,031}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \exp \left[ -\left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \right] - 2 \left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \cdot \exp \left[ -\left( \frac{t-b}{a} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.26)$$

При повышении номера  $n$  производной функции Гаусса повышается доминирующая частота вейвлета и степень его локализации

в частотной области. Поэтому вейвлеты  $n$ -го порядка производной функции Гаусса позволяют анализировать более тонкие высокочастотные особенности сигналов. Пример вейвлета, построенного по восьмой производной, приведен на рис. 2.16.

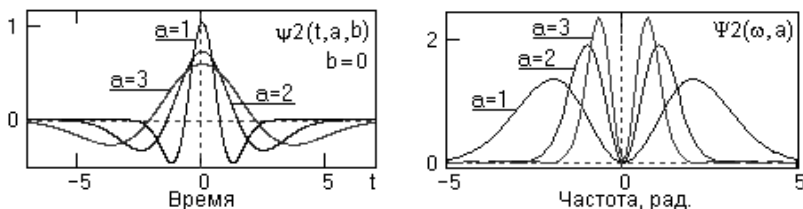


Рис. 2.15. Mhat-вейвлет во временной и частотной областях

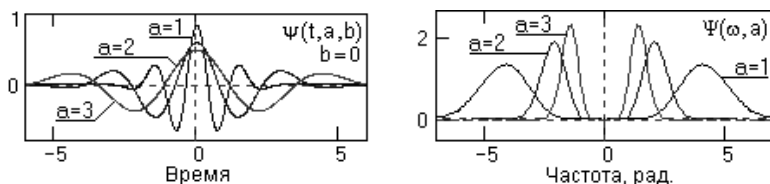


Рис. 2.16. Вейвлет, сконструированный на основе 8-й производной функции Гаусса, во временной и частотной областях

Ниже приводятся результаты применения Mhat и Wave-вейвлетов для анализа сигналов простых форм [13], [18].

В качестве примера рассмотрим вейвлет-преобразование стационарного гармонического сигнала  $s(t)$ , приведенного на рис. 2.17. На этом же рисунке ниже приведены вейвлеты  $\psi_a(t)$  симметричного типа разных масштабов.

Скалярное произведение (2.16) "просмотра" сигнала вейвлетом масштаба ' $a$ ' записывается в следующей форме:

$$C_a(b) = \langle s(t), \psi_a(t+b) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_a(t+b) dt. \quad (2.27)$$

Но выражение (2.27) эквивалентно выражению для коэффициента взаимной корреляционной функции  $R_a(b)$  сигналов  $s(t)$  и  $\psi_a(t)$ . Если сигнал  $s(t)$  представляет собой одну гармонику, а второй сигнал симметричен, задан на компактном носителе и имеет нулевое среднее значение, то, как известно, форма взаимной корреляционной функции таких сигналов также является центрированным гармоническим сигналом.

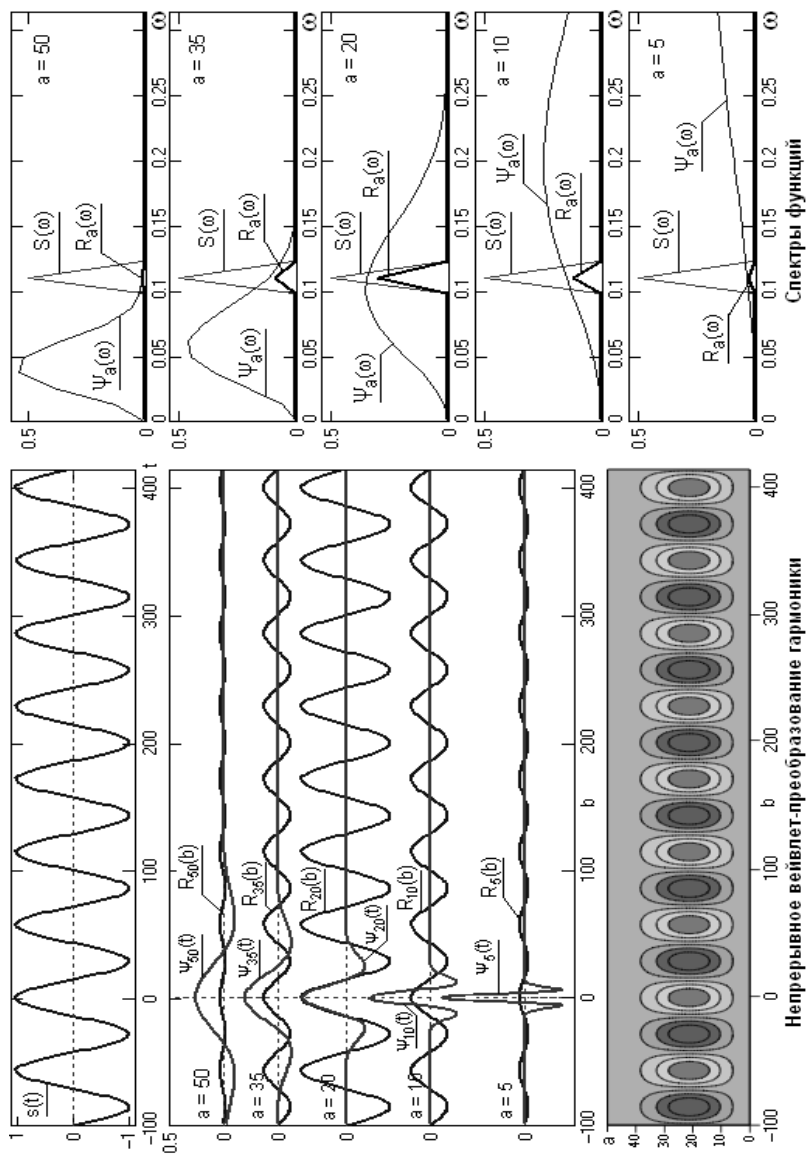


Рис. 2.17. Непрерывное вейвлет-преобразование стационарного гармонического сигнала [13]

В частотной области скалярное произведение двух функций отображается произведением фурье-образов этих функций, которые приведены на рис. 2.17 в правом столбце спектров. Масштабы спектров  $\psi_a(\omega)$  и  $R_a(\omega)$  для наглядности сопоставления нормированы к спектру  $s(t)$ . Максимальная амплитуда гармоники  $R_a(b)$  будет наблюдаться при совпадении средней частоты локализации вейвлета  $\psi_a(t)$  определенного масштаба 'a' в частотной области с частотой сигнала  $s(t)$ , что можно видеть на рис. 2.17 для функции  $R_a(b)$  при масштабе вейвлета  $a = 20$ .

Результирующий вейвлетный спектр непрерывного вейвлет-преобразования одной гармоники приведен на левом нижнем графике рис. 2.17 и показывает точное положение на временной оси 'b' максимумов и минимумов стационарного гармонического сигнала.

На рис. 2.18 приведен пример применения Wave-вейвлета для анализа простого гауссоподобного сигнала и его же с добавленным шумом с амплитудой, сравнимой с амплитудой самого сигнала. Как следует из рис. 2.18, сечение вейвлетного спектра при больших значениях масштабных коэффициентов 'a' (т.е. при малых доминирующих частотах вейвлетов) очень точно отсекает шумовой компонент и уверенно фиксирует положение вершины информационного сигнала сменой знака коэффициентов  $C(a, b)$ . Например, сечения спектра при значении масштабного коэффициента  $a = 10$  практически идентичны для исходного сигнала и сигнала с шумом.

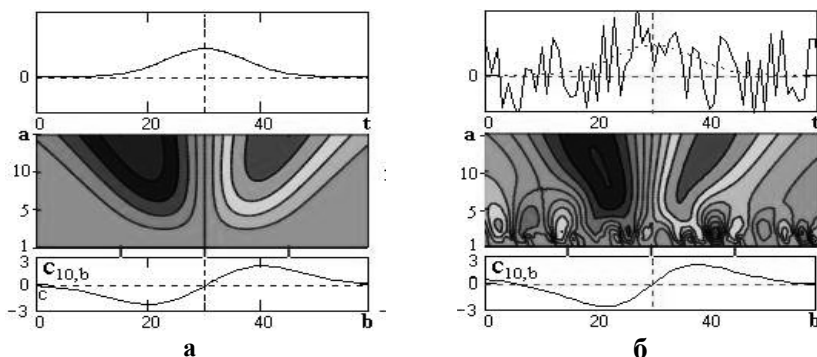


Рис. 2.18. Ввейвлет-анализ гауссоподобного сигнала (а); с добавленным шумом (б).

Wave-спектры и сечения спектров при значении  $a = 10$

На рис. 2.19–2.23 приведены примеры вейвлет-преобразований и скелетоны простых сигналов конечной длительности [18]. На рис. 2.19 показаны вейвлет-преобразование гармонического сигнала конечной длительности и его скелетон, на котором видно распространение влияния границ существования сигнала.

На рис. 2.20 представлены результаты расчета вейвлет-спектра для затухающего одночастотного колебания  $f(t) = \sin(\omega t) \exp(-kt)$ . Видно, что структура скелетона четко демонстрирует синусоидальную составляющую сигнала даже в области очень малых значений коэффициентов и позволяет определить период колебаний. Картина линий скелетона показывает постоянство частоты сигнала вплоть до его практического исчезновения и имеющее место уменьшение амплитуды с ростом времени.

Для данного сигнала также можно получить аналитическую зависимость коэффициентов спектра от параметров:

$$C(a, b) = \sqrt{2p}(\omega^2 + k^2)a^{2.5}e^{\varphi_1} \sin(\varphi_2),$$

здесь

$$\varphi_1(a, b) = -0,5a^2(\omega^2 - k^2) - kb,$$

$$\varphi_2(a, b) = \operatorname{arctg} \frac{2\omega k}{(\omega^2 - k^2)} - \omega ka^2.$$

Типичная картина структуры данных вейвлет-преобразования при наличии в сигнале особенностей (острия, скачки, изломы и т.п.) приведена на рис. 2.21. Исходный сигнал имеет скачок в центре временного интервала. Как видно из рис. 2.21, в окрестности особенности имеется прямолинейное схождение двух экстремумов в одну точку под некоторым углом. Остальные детали скелетона показывают влияние конечных границ сигнала. Аналогичный характер поведения существует и для других типов особенностей.

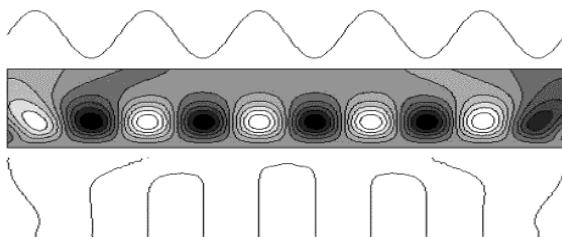


Рис. 2.19. Пример вейвлет-преобразования конечного гармонического сигнала конечной длительности

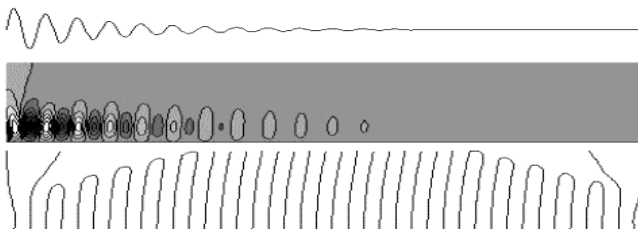


Рис. 2.20. Вейвлет анализ конечного затухающего сигнала постоянной частоты

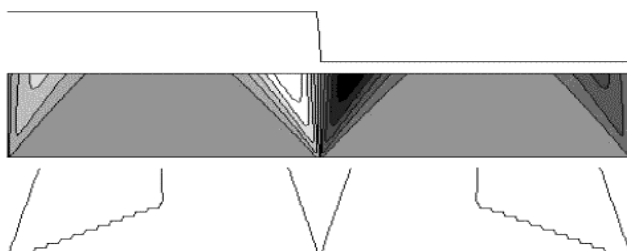


Рис. 2.21. Вейвлет-анализ конечного ступенчатого сигнала

На рис. 2.22 приведён вейвлет-анализ суммы синусоидального сигнала и шума той же амплитуды. На рисунке видны фильтрационные свойства вейвлет-преобразования. Высокочастотные составляющие шума результирующего сигнала в вейвлет-спектре сосредоточены в области малых значений масштаба, а при больших масштабных значениях представлена (несколько искаженная) ячеистая структура, характерная для гармонических колебаний. Усредняя расстояния между линиями экстремумов, можно оценить период исходного синусоидального колебания.

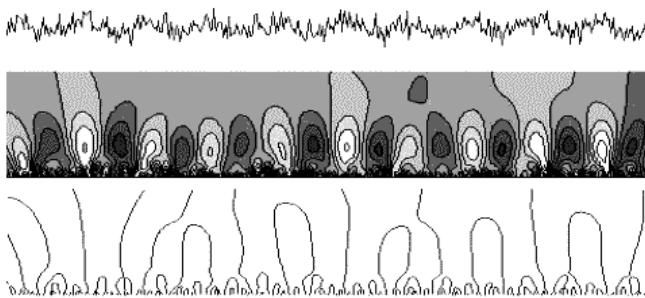


Рис. 2.22. Вейвлет-анализ суммы синусоиды и шума

На рис. 2.23–2.32 приведены результаты применения вейвлета Mhat для анализа сигналов простых форм [13]. Вычисления выполнены с Mhat-вейвлетом  $\psi(t, a, b)$  (2.26) по формуле:

$$C(a, b) = \sum_{t=b-3a}^{b+3a} s(t) \psi(t, a, b). \quad (2.28)$$

Для удаления влияния границ сигнала суммирование выполнялось в растворе угла влияния (т.е. по области достоверности) с шагом  $\Delta t = \Delta b = \Delta a = 1$ . Отсчет значений ' $a$ ' начинается с 1, а ряд коэффициентов  $c(0, b)$  оставляется нулевым и определяет нулевой фон контурных графиков спектра.

Вейвлет-анализ импульсов Кронека (положительного и отрицательного) приведен на рис. 2.25. Изображены тестируемый сигнал, вейвлет-спектр импульсов и сечения спектра на трех значениях параметра  $a = 1, 3$  и  $6$ . Цветовая гамма спектра здесь и в дальнейшем соответствует естественному порядку цветового ряда от красного (большие значения коэффициентов) к фиолетовому (малые значения коэффициентов).

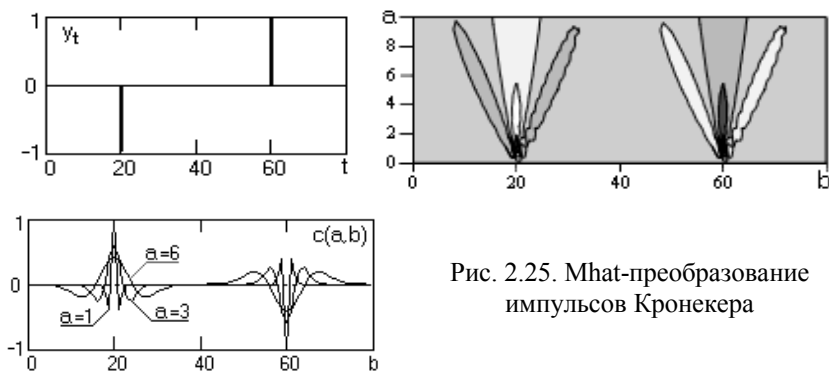


Рис. 2.25. Mhat-преобразование импульсов Кронека

На сечениях спектра видно, что свертка единичных импульсов с разномасштабными вейвлетами повторяет форму вейвлетов, как это и положено при операции свертки. Линии максимальных экстремумов на сечениях определяют временное положение импульсов, а боковые экстремумы противоположной полярности образуют характерные лепестки в конусе угла влияния импульсов, который хорошо выражен.



Аналогичный характер спектра проявляется для любых локальных неоднородностей на сигналах в форме пиков (рис. 2.26) со смещением максимумов и минимумов коэффициентов  $C(a, b)$  со значений  $a = 1$  в область больших значений масштабного параметра 'a' – это смещение зависимости от эффективной ширины пиков.

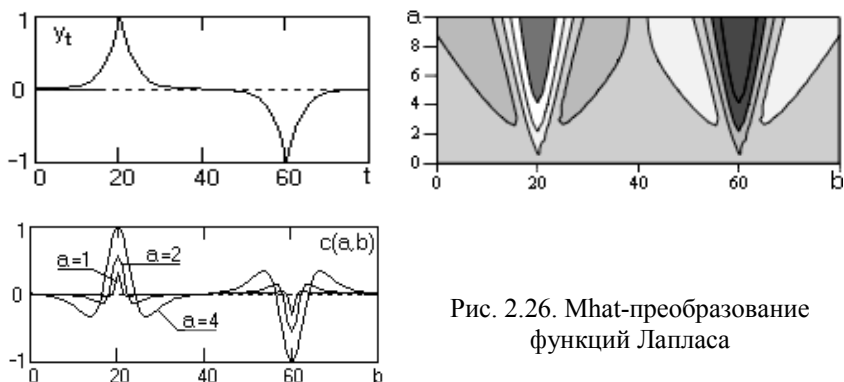


Рис. 2.26. Mhat-преобразование функций Лапласа

В отличие от рис. 2.26 на рис. 2.27 приведен вейвлет анализ более гладких функций – функций Гаусса. При сглаживании вершин пиковых неоднородностей форма цветовых конусов также сглаживается, линии сечений достаточно точно фиксируют на временной оси положение центров локальных неоднородностей.

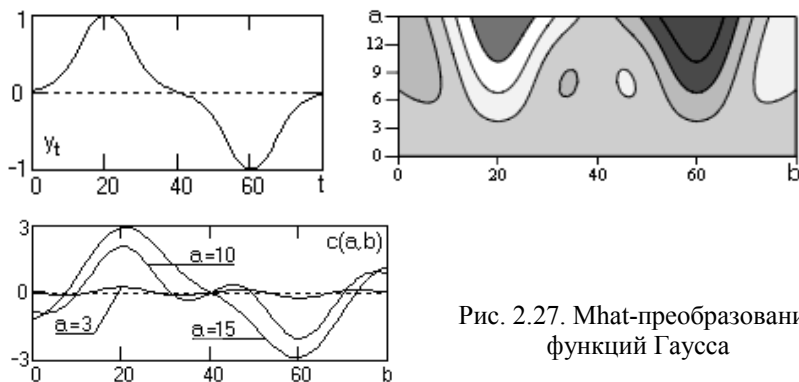


Рис. 2.27. Mhat-преобразование функций Гаусса

На рис. 2.28 приведён пример вейвлет-анализа простых функций переключения разной гладкости и крутизны с использованием Mhtat-вейвлета: а) линейная функция переключения, б) сглаженная функция переключения, в) скачкообразная функция переключения, г) линейная функция переключения с шумом. Центры перепадов фиксируются по переходу через нуль значений спектральных коэффициентов  $C(a, b)$ , а крутизна перепадов отражается, в основном, на значениях функции  $C(a, b)$  при малых значениях масштабного параметра ' $a$ '.

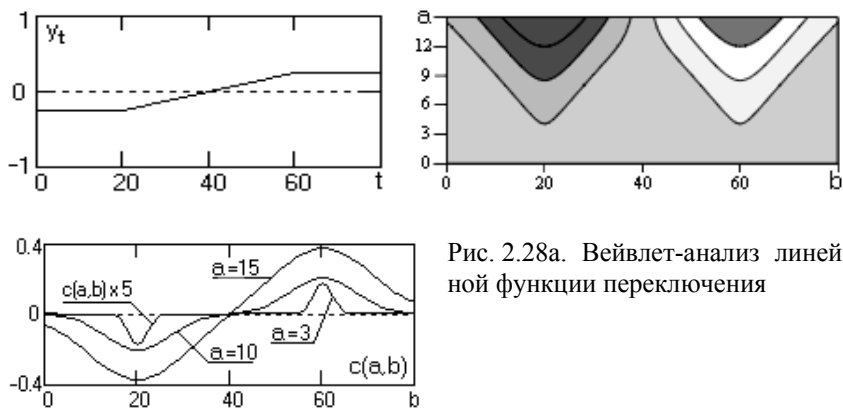


Рис. 2.28а. Вейвлет-анализ линейной функции переключения

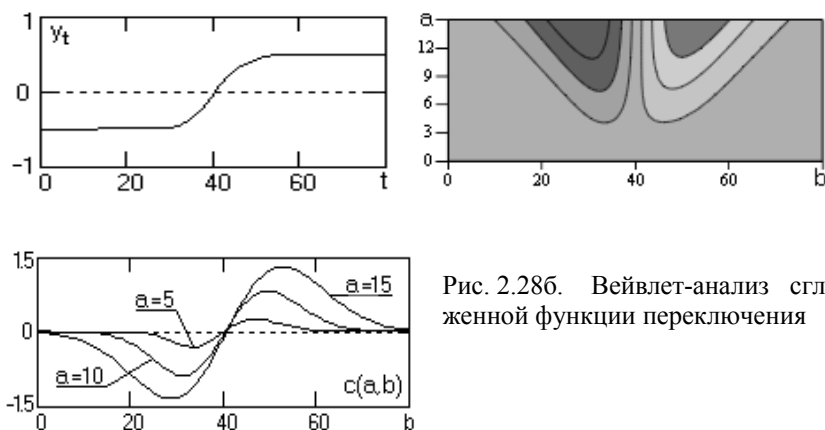


Рис. 2.28б. Вейвлет-анализ сглаженной функции переключения

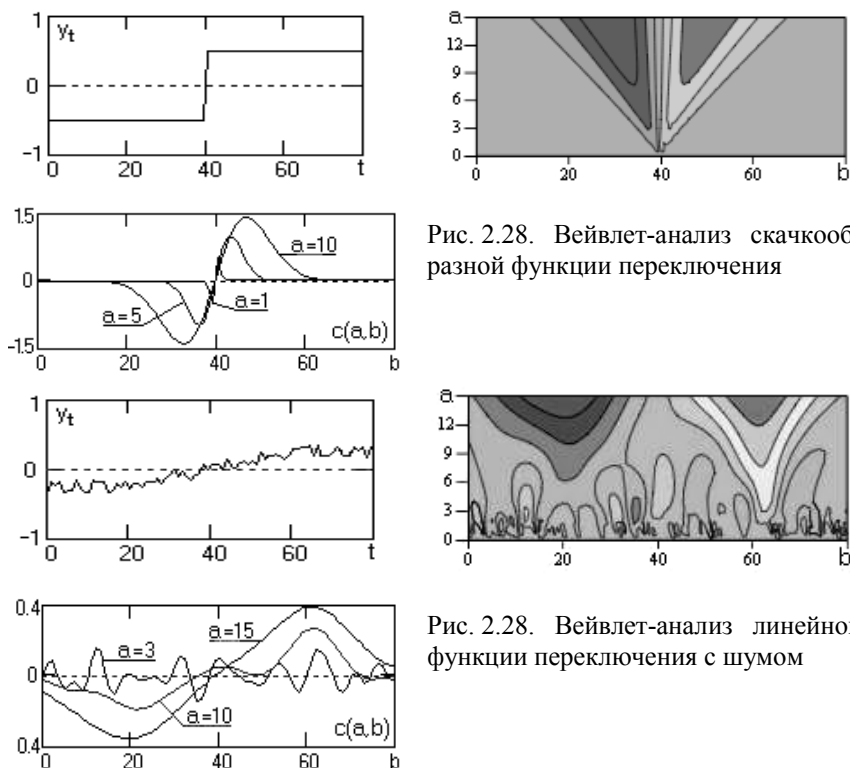


Рис. 2.28. Вейвлет-анализ скачкообразной функции переключения

Рис. 2.28. Вейвлет-анализ линейной функции переключения с шумом

При изломах функций спектрограммы уверенно фиксируют место изломов максимумами (минимумами) значений коэффициентов  $C(a, b)$ , как это показано на рис. 2.28. При наложении на такие функции шумов точное определение места изломов по масштабным сечениям на малых значениях параметра ' $a$ ' становится невозможным, однако на больших значениях параметра ' $a$ ' такая возможность сохраняется, естественно, с уменьшением точности локализации (рис. 2.28г).

На рис. 2.29 приведены примеры вейвлет-анализа различных колебательных сигналов, в том числе сигналов с наличием шумов. Если спектральные особенности сигналов широкомасштабны по диапазону значений параметра ' $a$ ', то даже при большом уровне шума остается возможность идентификации особенностей сигналов и их места на временной оси.

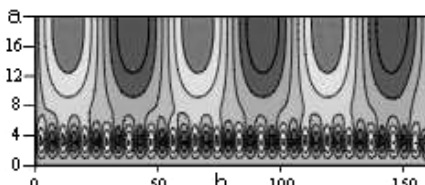
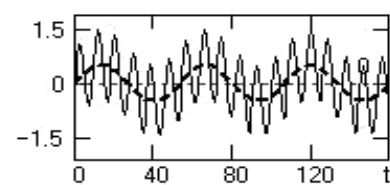


Рис. 2.29а. Вейвлет-анализ с помощью Mhat-преобразования различных колебательных функций: сумма двух гармоник

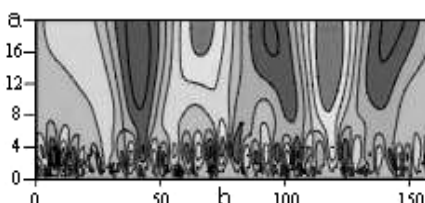
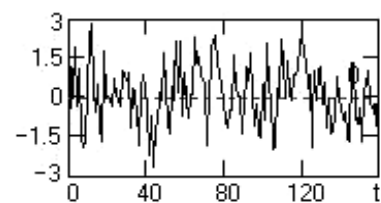
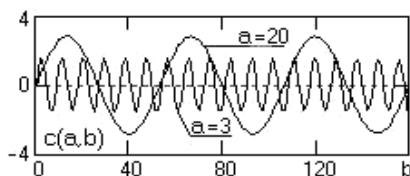


Рис. 2.29б. Вейвлет-анализ с помощью Mhat-преобразования различных колебательных функций: сумма двух гармоник, модулированных по амплитуде

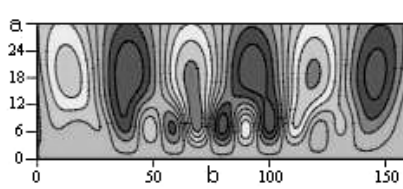
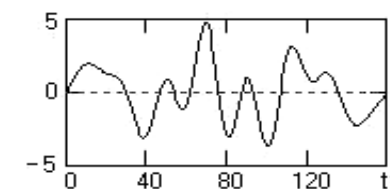
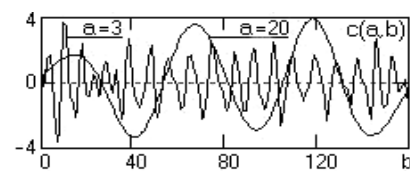


Рис. 2.29в. Вейвлет-анализ с помощью Mhat-преобразования различных колебательных функций: сумма двух гармоник, одна из которых модулирована по амплитуде функцией Гаусса

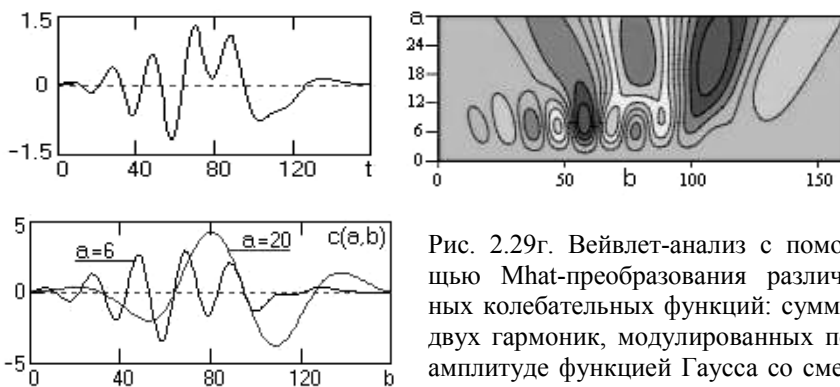


Рис. 2.29г. Вейвлет-анализ с помощью Mhat-преобразования различных колебательных функций: сумма двух гармоник, модулированных по амплитуде функцией Гаусса со смещением по фазе

На рис. 2.30 приведен пример вейвлет-анализа гармонического сигнала с одной характерной особенностью – его фаза изменена на  $180^\circ$ . Видно, что эта особенность чётко фиксируется на всех масштабах вейвлета и достаточно легко определяется даже в присутствии шумовых сигналов большой амплитуды.

Вейвлет-анализ на больших масштабах позволяет уверенно выделять характерные особенности тренда сигнала при наложении на него синусоидальных сигналов. Пример выделения изломов тренда приведен на рис. 2.31.

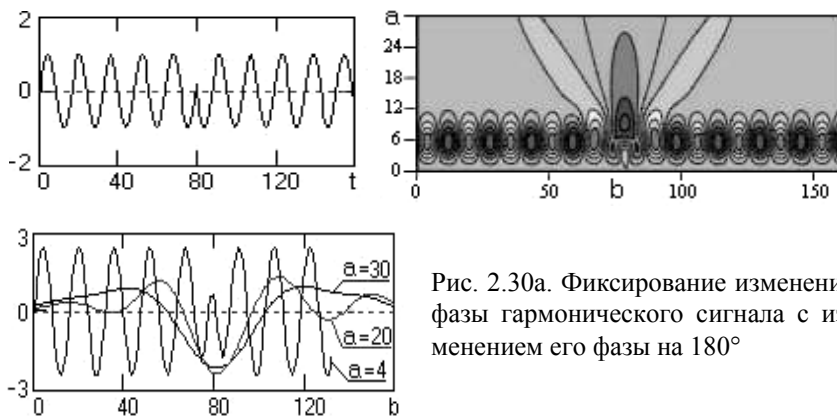


Рис. 2.30а. Фиксирование изменения фазы гармонического сигнала с изменением его фазы на  $180^\circ$

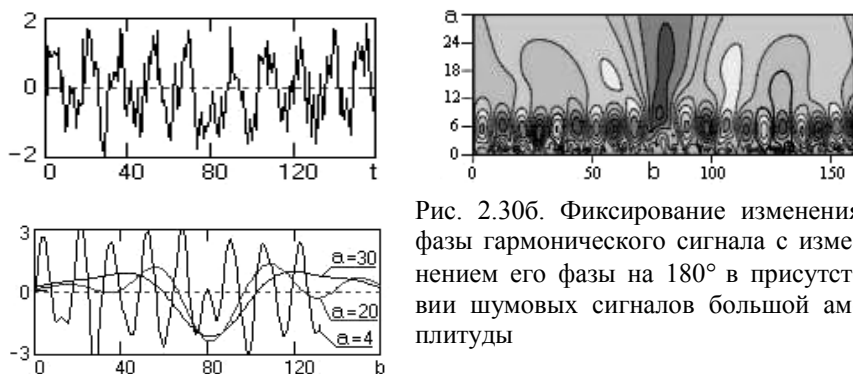


Рис. 2.30б. Фиксирование изменения фазы гармонического сигнала с изменением его фазы на  $180^\circ$  в присутствии шумовых сигналов большой амплитуды

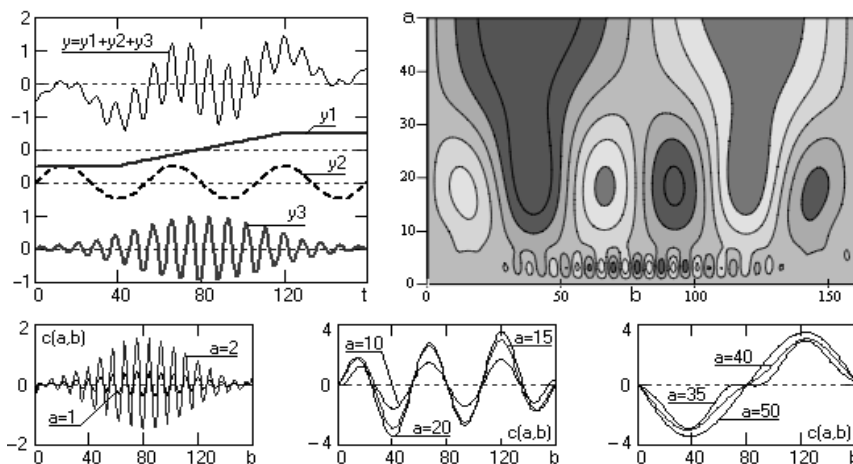


Рис. 2.31. Вейвлет-анализ суммы тренда ( $y_1$ ) и двух гармонических сигналов ( $y_2$  и  $y_3$ )

На рис. 2.32 и 2.33 показан вейвлет-анализ модельного сигнала, образованного суммой четырёх сигналов разной структуры. Сигналы  $y_1$  и  $y_2$  представляют собой функции Гаусса разного масштабного уровня, сигнал  $y_3$  – прямоугольный импульс, сигнал  $y_4$  задан в виде тренда с постоянным значением дифференциала. На контурном графике вейвлет-коэффициентов видны все три основные структуры сигнала при полном исключении тренда. Особенно четко выделяются границы скачков прямоугольной структуры. Справа на рис. 2.32 приведена трехмерная картина вейвлет-преобразования.

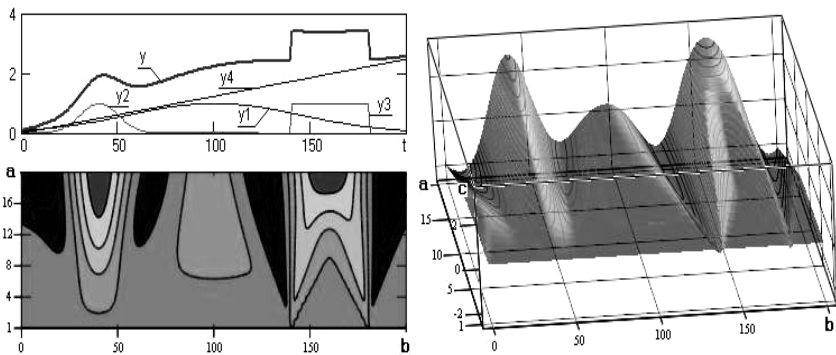


Рис. 2.32. Mhat -анализ суммы четырёх различных сигналов

Результаты вейвлет-анализа (вид спектральной поверхности) существенно зависят от выбранного семейства анализирующих вейвлетов, их частотной и масштабной степени локализации. На рис. 2.33 приведён пример вейвлет-анализа того же сигнала, что и на рис. 2.32, но семейством вейвлетов построенных на основе восьмой производной функции Гаусса. Следствием повышения степени локализации вейвлетов в частотной области является существенное повышение чувствительности вейвлета к высокочастотным составляющим сигнала на малых масштабных коэффициентах.

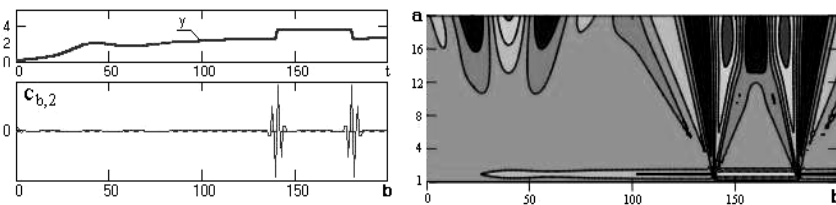


Рис. 2.33. Вейвлет-анализ суммы четырёх различных сигналов с помощью вейвлета, построенного по восьмой производной функции Гаусса (см. рис. 2.16)

Свойства базисного вейвлета, такие как степень локализации, доминирующая частота, чётность или нечётность существенно влияют на вейвлет-спектры анализируемых сигналов и на возможности выделения его локальных особенностей. При вейвлет-исследовании реальных сигналов для адекватной расшифровки их

локальных особенностей удобно иметь для сравнения виды спектров простых сигналов. Приведём (следуя [13]) сравнительные спектры простых сигналов при использовании трёх вейвлетов с разными свойствами: Wave (нечетный, рис. 2.14), Mhat (четный, рис. 2.15) и вейвлета, построенного по 8-й производной функции Гаусса (четный, рис. 2.16, имеющий в четыре раза более высокую доминирующую частоту, чем вейвлет Mhat.). Сравнительные спектры приведены на рис. 2.34–2.41.

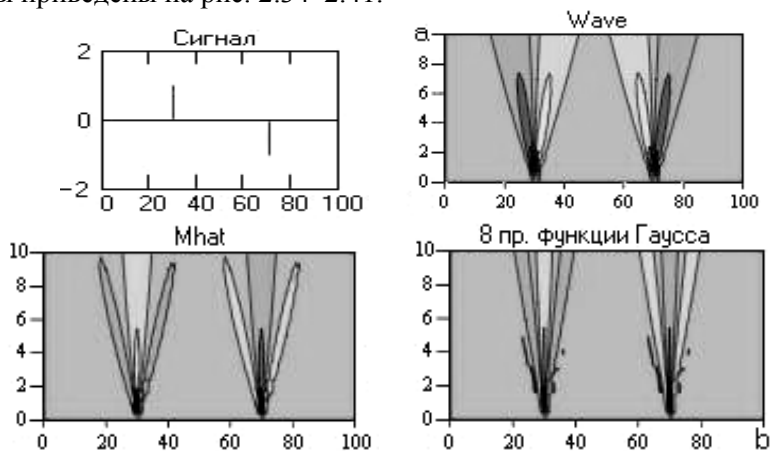


Рис. 2.34. Вейвлет-спектры импульсов Кронекера

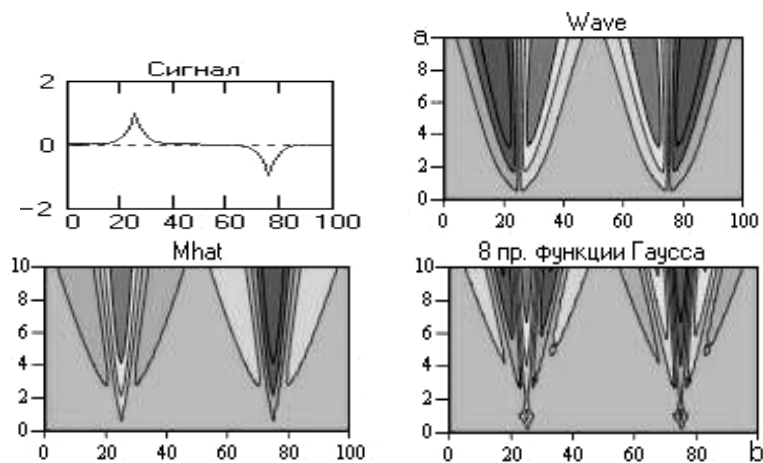


Рис. 2.35. Вейвлет-спектры положительного и отрицательного пиков Лапласа



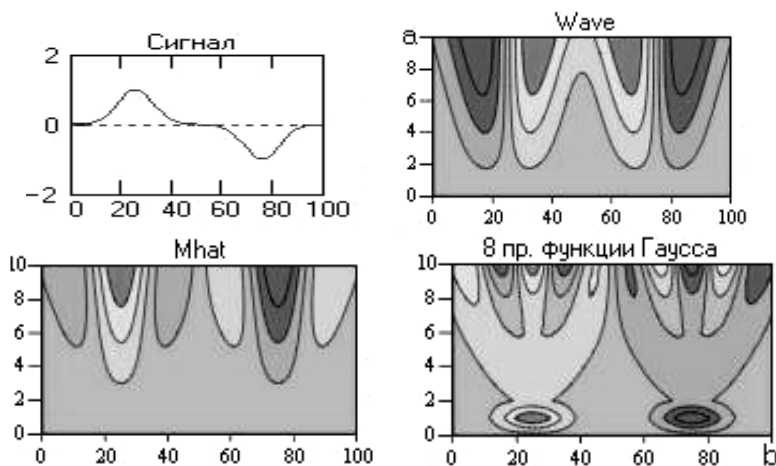


Рис. 2.36. Вейвлет-спектры положительной и отрицательной функций Гаусса

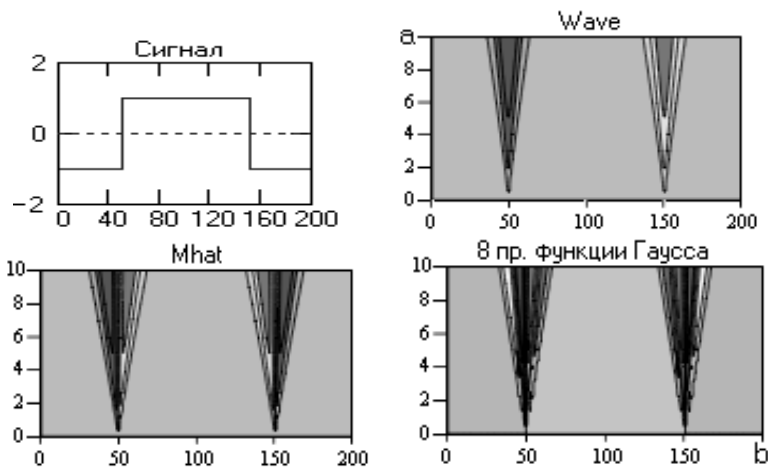


Рис. 2.37. Вейвлет-спектры положительного П-импульса

При исследовании произвольных сигналов желательно использование разнотипных вейвлетов, это позволяет повысить достоверность выделения и их расшифровки локальных особенностей сигналов.

Вейвлет-преобразование может служить своеобразным «магическим стеклом», позволяя увидеть локальные кратковременные осо-

бенности сигнала, неразличимые при его исследовании классическими методами. Примером таких особенностей являются сбои в показаниях датчиков, царапины на зеркальной поверхности или виниловых пластинках.

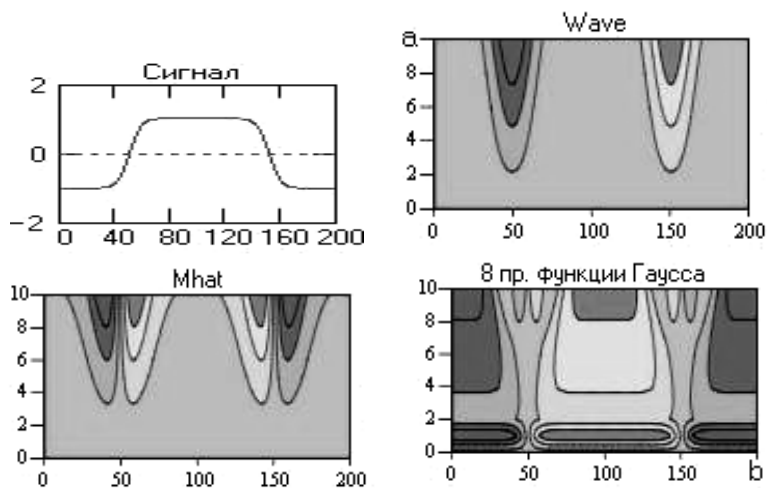


Рис. 2.38. Вейвлет-спектры сглаженного П-импульса

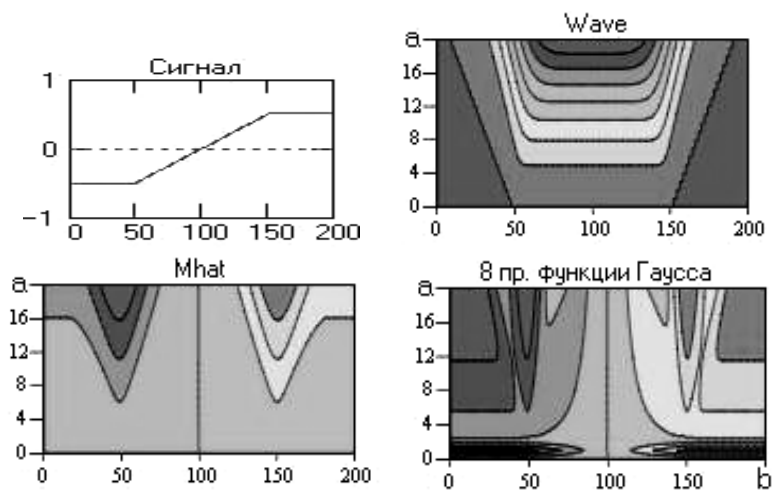


Рис. 2.39. Вейвлет-спектры линейной функции переключения

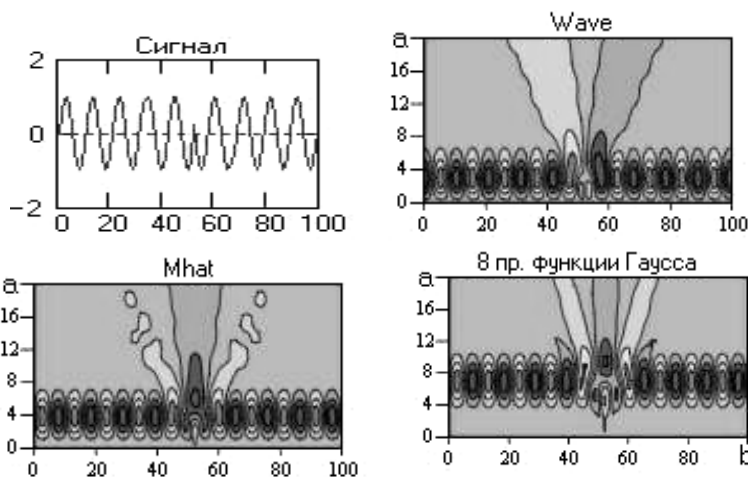


Рис. 2.40. Вейвлет-спектры фазового скачка синусоиды

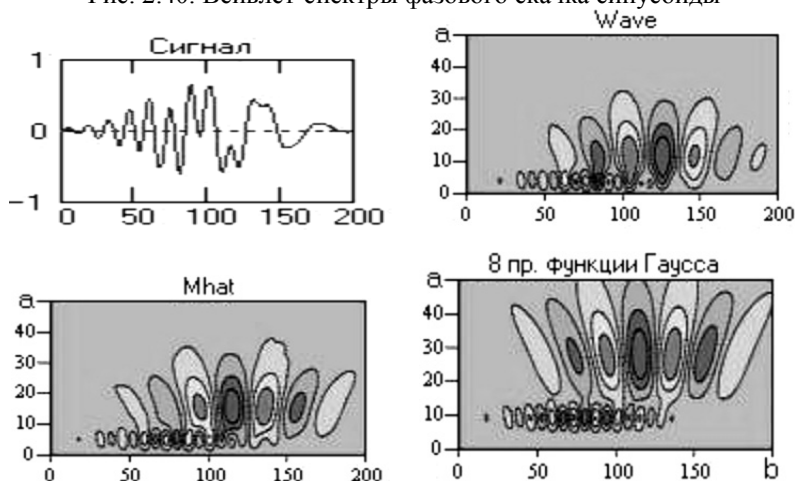


Рис. 2.41. Вейвлет-спектры суммы двух модулированных синусоид

Рассмотрим синусоидальный сигнал, имеющий небольшое локальное искажение (рис. 2.42). Искажение сигнала выделено квадратом на графике. На спектрограмме сигнала эта особенность никак не отражается – видна только гармоническая составляющая. Однако на диаграмме коэффициентов детализации эта особенность выражена очень наглядно.

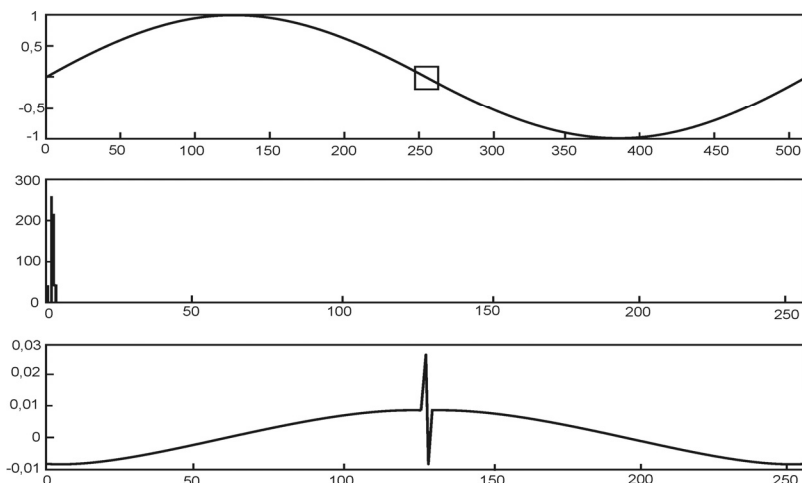


Рис. 2.42. Пример использования вейвлет-преобразования для поиска локальных искажений гармонического сигнала

Другой, ещё более эффектный пример – нарушение непрерывности второй производной сигнала. График (рис. 2.43) этой функции выглядит как гладкая кривая, но на самом деле состоит из двух экспоненциальных компонентов, соединяющихся в точке  $t = 500$ . Непрерывность нарушается только во второй производной, и этот момент также хорошо выделяется на графике вейвлет-разложения.

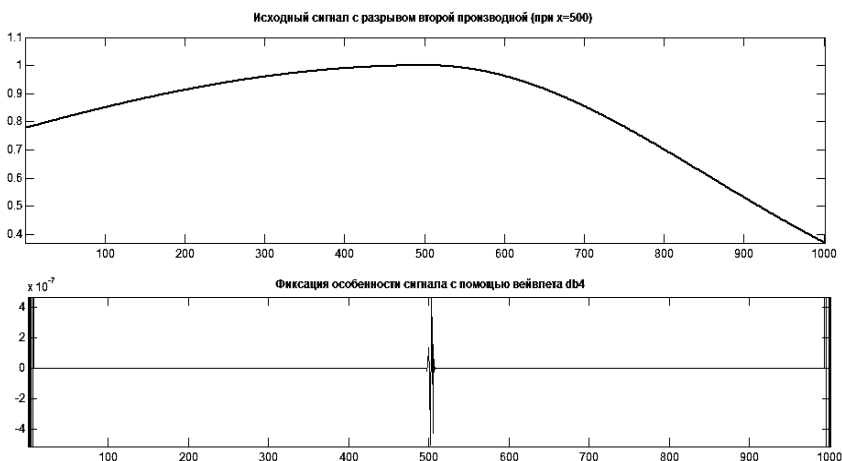


Рис. 2.43. Нахождение разрыва во второй производной

Одним из направлений приложений вейвлет-анализа является исследование свойств фрактальных объектов различной природы и, в частности, определение фрактальной размерности. Поверхность вейвлет-преобразования показывает наличие скрытого самоподобия в непрерывном отображении или дискретном наборе данных в виде развитой древообразной структуры с развилками, зависящими от масштаба по степенному закону. На рис. 2.44 приведён пример вейвлет-анализа мультифрактальной кривой Коха.

Для временных рядов показатель степени мультифрактальности можно оценить. Подсчитывается число точек максимумов коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль параметра сдвига в области масштаба, где имеется выраженная ветвистая структура скелетона (обычно это интервал  $a = 1 \div 16$ , если принять временной шаг равным 1). Тангенс угла наклона прямой линии, аппроксимирующей зависимость  $\ln N(a)/\ln a$  методом наименьших значений, дает показатель самоподобия (для него принято название параметра Херста по имени автора, исследовавшего структуру дельты Нила).

Указанный подход использовался при вейвлет-анализе временных рядов отклонений температуры от среднемесячных значений по результатам измерений на метеорологической станции Фрунзе г.Бишкек за период 1931–1998 гг. (рис. 2.45, [14]). Оказалось, что значение параметра Херста  $H = 0,9$  близко к значению, приведенному в [13] и рассчитанному по той же методике ( $H = 0,81$ ). Полученные близкие значения параметра Херста на разных временных рядах разной продолжительности позволяют предположить, что динамическим системам, например, таким как климатическая, при-

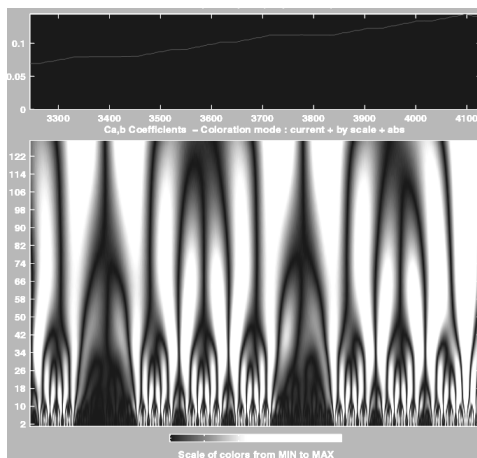


Рис. 2.44. Вейвлет-анализ мультифрактальной кривой Коха

сущи скрытые внутренние характеристики, статистически воспроизводимые на различных временных масштабах.

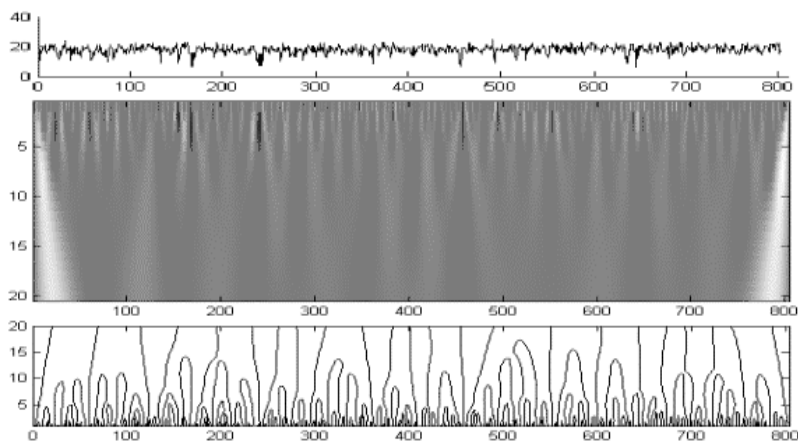


Рис. 2.45. Временной ряд отклонений температуры, и данные вейвлет-анализа – вейвлет-образ сигнала и скалограмма

Применение различных вейвлетов в вейвлет-анализе приводит к различным поверхностям вейвлет-спектра и, следовательно (подобно оптическому фильтру на объективе микроскопа), помогает анализировать сигнал с разных точек зрения, выявляя его особенности и закономерности.

Поэтому иногда вейвлет-анализ называют математическим микроскопом, способным найти закономерности и/или особенности сигнала на различных масштабах и в различной временной или пространственной локализации.

На рис. 2.46 анализируемый сигнал состоит из двух модулированных гауссианов.

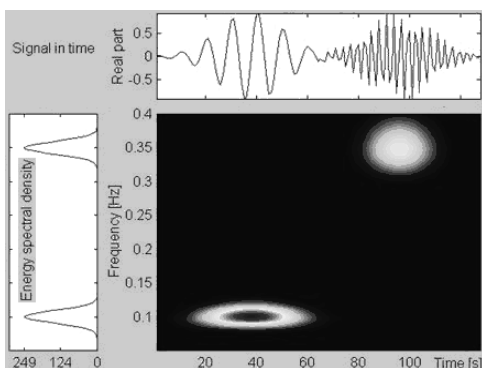


Рис. 2.46. Вейвлет-преобразование сигнала, состоящего из двух модулированных гауссианов

Преобразование вейвлетом Морле четко показывает их пространственную и частотную локализацию. Спектр Фурье, приведённый слева на рис. 2.45, дает только частотную локализацию.

На рис. 2.47 приведены результаты исследования сигнала с меняющейся частотой при помощи вейвлет-анализа Mhat-вейвлетом и вейвлетом Морле.

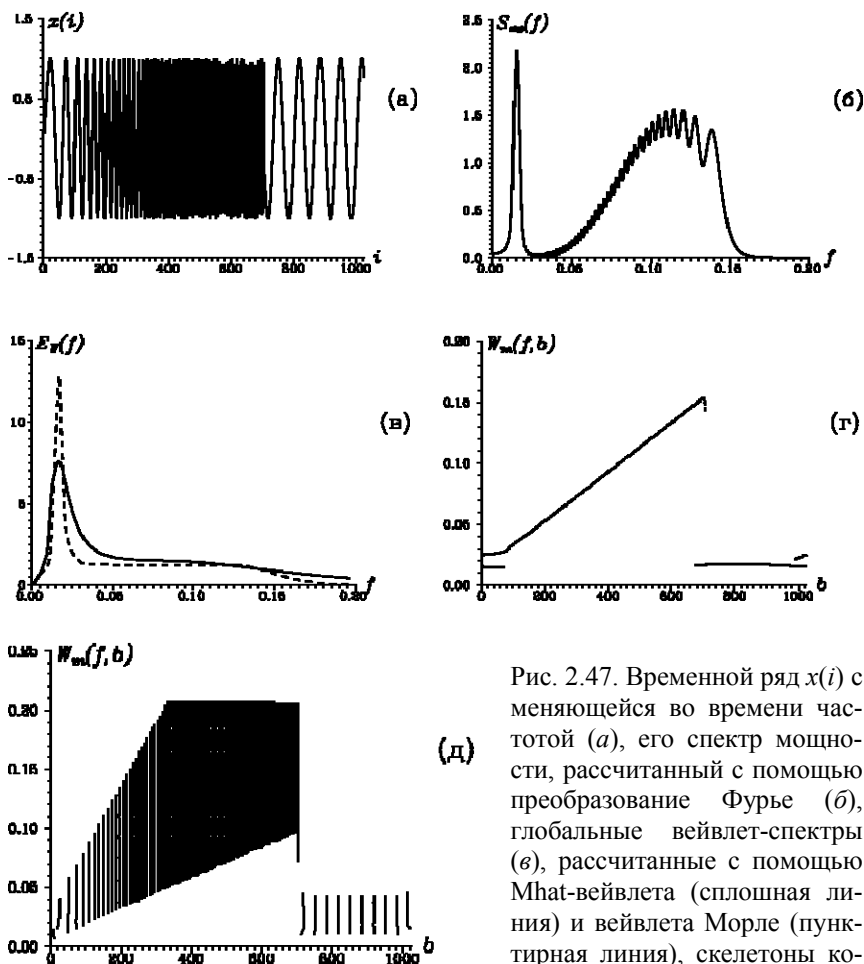


Рис. 2.47. Временной ряд  $x(i)$  с меняющейся во времени частотой (а), его спектр мощности, рассчитанный с помощью преобразование Фурье (б), глобальные вейвлет-спектры (в), рассчитанные с помощью Mhat-вейвлета (сплошная линия) и вейвлета Морле (пунктирная линия), скелетоны коэффициентов вейвлет-преобразования, рассчитанные с помощью вейвлета Морле (з) и Mhat-вейвлета (д)

## 2.7. Основные характеристики вейвлетов

### *Частотно-временная локализация*

Характерной особенностью анализирующих вейвлетов является частотно-временная локализация. Из этого следует, что вейвлеты и их преобразования Фурье существенно отличаются от нуля лишь на малых интервалах времени, а частоты очень мало отличаются от нуля (либо равны нулю) вне этих интервалов.

Количественной мерой локализации функции  $z(t)$  служит ее центр  $\langle t \rangle$ :

$$\langle t \rangle = \frac{1}{\|z\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt, \quad (2.29)$$

а также радиус  $\Delta_t$ :

$$\Delta_t^2 = \frac{1}{\|z\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} [t - \langle t \rangle]^2 |z(t)|^2 dt. \quad (2.30)$$

Эффективная ширина вейвлета равна  $2\Delta_t$ .

### *Спектральные характеристики*

Пусть функции  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$  связаны между собой следующими соотношениями Фурье:  $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt$  и

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega. \text{ В этом случае будет справедливо равенство}$$

Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.31)$$

Левая часть этого равенства называется энергией сигнала  $f(t)$ . Таким образом, вводится понятие плотности спектра энергии, которое определяется следующим образом:

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\hat{f}(\omega)|^2. \quad (2.32)$$



Для вейвлет-преобразования существует аналог равенства Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = C_{\Psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2}. \quad (2.33)$$

Поэтому можно ввести понятие «плотность спектра энергии вейвлета», определяемое величиной:

$$E(a, b) = |W(a, b)|^2. \quad (2.34)$$

В отличие от равенства (2.32) величина (2.34) определяет спектральную характеристику не только для заданного масштаба, но и для параметра сдвига  $b$ . Поэтому ее называют локальным спектром энергии. Аналогом плотности спектра энергии выражения (2.32) является глобальный спектр энергии:

$$E_{\omega}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(a, b)|^2 db. \quad (2.35)$$

Эта характеристика показывает распределение энергии по масштабам. Глобальный спектр энергии связан с локальным следующим соотношением:

$$E_{\omega}(a) = a \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 d\omega. \quad (2.36)$$

То есть глобальный спектр энергии является плотностью спектра энергии, сглаженной на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

### *Скалограмма и скейлограмма*

При обработке результатов измерений основными объектами преобразования являются временные ряды, заданные на конечном промежутке времени. Поэтому определенными выше непрерывным вейвлет-преобразованием, локальным и глобальным спектрами энергии нельзя воспользоваться на практике. Введем их аналоги, которые возможно применить практически.

Пусть временной ряд задан значениями функции, следующими друг за другом с постоянным интервалом времени  $\Delta t$ :  $f_k = f(t_k)$ ,  $t_k = \Delta t k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Оценка вейвлет-преобразования этой последовательности будет следующей:

$$W_A(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \Psi^* \left( \frac{t_k - b}{a} \right), \quad (2.37)$$

где:

$$n(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{B} \left( \frac{t_k - b}{a} \right)^2}. \quad (2.38)$$

Параметр  $B = 2$  для Mhat-вейвлета и  $B = \alpha^2$  – для вейвлета Морле.

Оценка (2.37) называется амплитудной вейвлет-функцией (Foster). Эта функция вычисляется на дискретном множестве значений аргументов  $a_i$  и  $b_j$ ;  $i = 0, 1, \dots, N_a - 1$ ;  $j = 0, 1, \dots, N_b - 1$ .

Используя уравнение (2.31), введем оценку локального спектра энергии:

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2. \quad (2.39)$$

Эта функция называется скалограммой (scalogram) и описывает распределение энергии по масштабам. Используя скалограмму, вводим оценку глобального спектра энергии:

$$G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j), \quad (2.40)$$

где  $N^*$  – число точек, по которому осуществляется осреднение. Эта функция называется скейлограммой (scalegram). Скейлограмма в вейвлет-анализе является аналогом сглаженной периодограммы в фурье-анализе.

### 3. АЛГОРИТМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим алгоритм вейвлет-анализа временных рядов. Возьмем в качестве исходных данных равномерный временной ряд:

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где  $\Delta t$  – шаг выборки,  $N$  – число точек ряда. Критический порог для разделения шумового и детерминированного компонентов временного ряда –  $T_q$  отвечает уровню значимости  $q$ .

Алгоритм спектрального анализа сигнала состоит из следующих шагов [11], [12].

*1. Графическое представление.*

В первую очередь необходимо визуально изучить график исходного ряда. Визуальное изучение позволяет обнаружить присутствие в данных постоянного слагаемого, или низкочастотного компонента (тренда). Так как вейвлеты обладают нулевыми моментами, они игнорируют постоянное слагаемое. Но на практике, по отношению к тренду, они обладают этим свойством не всегда. Таким образом, для изучения высокочастотных компонентов ряда бывает полезно исключить из данных постоянное слагаемое и тренд.

*2. Исключение тренда и центрирование ряда.*

Для того чтобы исключить тренд, необходимо знать его модель. Если известно теоретическое объяснение природы тренда, то его исключение производится на основе этой теории. В большинстве случаев природа тренда неизвестна. В таких случаях в качестве формальной модели можно использовать линейную комбинацию каких-либо полиномов и свободного члена. Параметры для такой модели можно определить при помощи метода наименьших квадратов. После этого значения тренда вычитаются из исходных данных. В самом простом случае такой операцией будет центрирование ряда, т.е. исключение постоянного слагаемого. Среднее значение ряда определяется по формуле:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k. \quad (3.1)$$

Соответственно, центрированный ряд получается из исходного следующим образом:

$$x_k^0 = x_k - m, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

*3. Графическое представление центрированного ряда.*

*4. Оценивание дисперсии ряда.*

Оценка дисперсии ряда дается следующей формулой:

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^0)^2. \quad (3.3)$$

В большинстве случаев, перед проведением вейвлет-анализа бывает полезно изучить исследуемый временной ряд при помощи

фурье-преобразования. Если это не требуется, то можно перейти к п. 7.

##### 5. Вычисление периодограммы.

Рассмотрим упрощенный вариант фурье-анализа исследуемого временного ряда без использования алгоритма быстрого преобразования Фурье. В первую очередь вычисляется дискретное преобразование Фурье:

$$X_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^0 e^{-i\frac{2\pi}{N}kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

Затем вычисляется периодограмма:

$$D_j = \frac{1}{N^2} [(\operatorname{Re} X_j)^2 + (\operatorname{Im} X_j)^2], \quad j = 0, 1, \dots, N/2. \quad (3.5)$$

В случае, если  $N$  – нечетное, вычисления ведутся до  $(N+1)/2$ . Отсчеты периодограммы соответствуют частотам:

$$\nu_j = \Delta\nu j, \quad j = 0, 1, \dots, N/2, \quad (3.6)$$

где: 
$$\Delta\nu = \frac{1}{N\Delta t}. \quad (3.7)$$

##### 6. Графическое представление периодограммы и порога обнаружения сигнала.

Это позволяет отождествить значимые спектральные линии. Для этого необходимо задать уровень значимости  $q \ll 1$  и определить соответствующий ему порог обнаружения сигнала. В том случае, когда неизвестны периоды, присутствующие в данных, применяется критерий, основанный на статистике распределения наибольшего отсчета периодограммы белого шума:

$$X_q = -\ln \left[ 1 - N^{-2} \sqrt[2]{(1-q)^2} \right]. \quad (3.8)$$

Для случая, когда частота гармонического колебания нам известна:

$$X_q = -\ln q. \quad (3.9)$$

Значимыми пиками периодограммы являются все пики, которые превышают критический уровень  $\sigma_0^2 X_q / N$ . Вероятность такого утверждения равна  $1 - q$ .

## 7. Вычисление вейвлет-преобразования.

Дискретные значения амплитудной вейвлет-функции вычисляются по следующим формулам:

$$W_A(a_i, b_j) = \frac{1}{n(a_i, b_j)} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^0 \Psi^* \left( \frac{t_k - b_j}{a_i} \right), \quad (3.10)$$

$$n(a_i, b_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp \left( -\frac{1}{B} \left( \frac{t_k - b_j}{a_i} \right)^2 \right). \quad (3.11)$$

В этих формулах  $\psi(t)$  – принятый анализирующий вейвлет.

Далее будет рассмотрен алгоритм, в котором используется вейвлет Морле с параметром  $\alpha^2$ :

$$\psi(t) = e^{-t^2/\alpha^2} e^{i2\pi t}. \quad (3.12)$$

Тогда в формуле (3.11) параметр  $B = \alpha^2$ .

## 8. Дискретизация аргументов.

Кроме индивидуальной формы вейвлет также имеет характерный размер. При фиксированном значении масштабного коэффициента характерный размер определяется следующей величиной:

$$d_a = 2\Delta_t a, \quad (3.13)$$

где  $\Delta_t$  – радиус вейвлета, определяемый по формуле (2.30).

Функция  $W_A(a, b)$  определяет корреляцию между анализирующим вейвлетом, помещенным в точку  $b$ , и какой-либо деталью временного ряда размеров  $d_a$  с центром в точке  $b$ . Наибольшее значение модуль этой функции принимает в том случае, когда размер вейвлета совпадает с размером "текущей" детали временного ряда. Для полигармонической функции мерой масштаба ее деталей является период гармонических компонентов. Мера протяженности вейвлета  $d_a$  определяется значением масштабного коэффициента  $a$ . В случае полигармонической функции, заданной на сетке с шагом  $\Delta t = \text{const}$ , диапазон периодов гармоник определяется величинами  $P_{\min} = 2\Delta t$  и  $P_{\max} = (N-1)\Delta t$ . Запишем условия соответствия размеров вейвлета и предельных периодов гармонических компонентов:

$$2\Delta_t a_{\min} = P_{\min}; \quad 2\Delta_t a_{\max} = P_{\max}. \quad (3.14)$$

В соответствии с этим выберем наибольшее и наименьшее значения масштабного коэффициента:

$$\begin{aligned} a_{\min} &= \frac{\Delta t}{\Delta_t}; \\ a_{\max} &= \frac{(N-1)\Delta t}{2\Delta_t}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для вейвлета Морле формулы (3.15) будут записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{\min} &= \frac{2\Delta t}{\alpha}; \\ a_{\max} &= \frac{(N-1)\Delta t}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эти значения берутся лишь в тех случаях, когда выполняется анализ временного ряда на полном диапазоне масштабов. В большинстве случаев анализ временного ряда бывает целесообразно исследовать в более узком диапазоне масштабов, тогда значения  $a_{\min}$  и  $a_{\max}$  выбирают из других соображений.

Определим шаг дискретизации масштабов следующим образом:

$$\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{N_a - 1}. \quad (3.17)$$

Тогда дискретные значения масштабных коэффициентов будут следующими:

$$a_i = a_{\min} + \Delta a i, \quad i = 0, 1, \dots, N_a - 1. \quad (3.18)$$

Во многих случаях значения параметра  $a$  представляют в логарифмическом масштабе. Это связано с тем, что ширина спектральной линии увеличивается с ростом масштаба.

Рассмотрим способы дискретизации параметра  $b$ . В самом простом случае границы диапазона сдвигов назначаются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{\min} &\geq 0; \\ b_{\max} &\leq (N-1)\Delta t. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Соответственно, дискретные значения сдвигов можно вычислить по формуле:

$$b_j = b_{\min} + \Delta b j, \quad j = 0, 1, \dots, N_b - 1. \quad (3.20)$$

Здесь  $N_b$  – принятое число узлов сетки, следующих друг за другом с постоянным шагом:

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{N_b - 1}. \quad (3.21)$$

В связи с тем, что около границ невозможно использовать всю длину анализирующего вейвлета, при таком способе дискретизации параметра  $b$  вблизи границ  $b_{\min}$  и  $b_{\max}$  величины  $W_A(a_i, b_j)$  будут вычисляться с погрешностями. Чтобы исключить такие граничные эффекты, вейвлет-преобразование следует вычислять только для значений сдвига, которые отстоят от границ на величину, равную текущему радиусу вейвлета  $a\Delta_t$ . В этом случае формулу (3.20) можно записать в следующем виде:

$$b_j = b_{\min} + \Delta b j, \quad j = J_a^* + 1, \dots, N_b - J_a^* - 1, \quad (3.22)$$

где  $J_a^*$  – радиус вейвлета, выраженный в единицах  $\Delta b$  и соответствующий текущему значению масштаба  $a$ :

$$J_a^* = \left\lfloor \frac{a_i \alpha}{2\Delta b} \right\rfloor. \quad (3.23)$$

В формуле (3.23) знак квадратных скобок обозначает операцию округления до ближайшего целого.

Множество узлов дискретной сетки, определяемое формулами (3.18) и (3.22), называется треугольником достоверности. Обычно краевые эффекты игнорируются и результаты вейвлет-анализа представляются в прямоугольной области узлов, определяемой формулами (3.18) и (3.20).

#### 9. Вычисление скалограммы.

Значения скалограммы для каждого узла сетки вычисляются по формуле:

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2. \quad (3.24)$$

#### 10. Визуализация скалограммы.

Для изображения значений скалограммы  $S(a_i, b_j)$  могут быть использованы следующие способы:

а) представление поверхности в трехмерном пространстве координат  $(a, b, S)$ ;

б) плоское изображение поверхности  $S(a,b)$  в координатах  $(a,b)$  в виде топографической карты. Масштаб третьего измерения указывается оцифровкой изолиний или раскраской областей между изолиниями. Градации цвета или последовательность различных цветов оцифровывается при помощи специальной цветовой палитры, которая должна прилагаться к графику вейвлета.

#### 11. Вычисление скелетона.

В некоторых случаях широкие контуры линий близких по частоте гармоник не дают возможности проследить за эволюцией их частот во времени. В этом случае можно отсечь влияние контуров, выделив те точки скалограммы, в которых она имеет максимумы по переменным  $a$  и  $b$ :

$$S_c(a_i, b_j) = \begin{cases} S_{ij}, & \text{если } S_{i-1,j} < S_{ij} > S_{i+1,j} \\ & \text{или } S_{i,j-1} < S_{ij} > S_{i,j+1} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Эта функция называется скелетоном. Для синусоидального сигнала точки скелетона располагаются вдоль линий, идущих параллельно оси времени. В случае, если данные имеют гармонические или квазигармонические компоненты, топографическая карта скелетона будет состоять из линий, ориентированных вдоль оси  $b$ . Для случая шумового компонента линии скелетона вытягиваются в перпендикулярном направлении, т.е. параллельно оси  $a$ . Таким образом, когда данные содержат и гармонические компоненты и шум, карта скелетона дает возможность увидеть их отдельно.

#### 12. Вычисление скейлограммы.

Скейлограмма вычисляется по формуле:

$$G_i = \frac{1}{N_b - 2J_a^*} \sum_{j=J_a^*}^{N_b - J_a^* - 1} S(a_i, b_j), \quad i = 0, \dots, N_a - 1, \quad (3.26)$$

где  $J_a^*$  вычисляется из (3.23), если вычисления ведутся в треугольнике достоверности. В остальных случаях  $J_a^* = 0$ .

#### 13. Конец алгоритма.



#### 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА В ИЗУЧЕНИИ КЛИМАТА

Рассмотрим несколько примеров использования вейвлет-анализа для изучения климатических данных. В большинстве случаев климатические данные представлены в виде временных рядов, заданных на конечном промежутке времени с постоянным шагом по времени (сутки, месяц, год и т.д.)

Проведем вейвлет-анализ климатических колебаний, оказывающих наиболее значительное влияние на климат Земли. Это: Арктическое колебание (AO – Arctic Oscillation), Североатлантическое колебание (NAO – North Atlantic Oscillation), Тихоокеанское декадное колебание (PDO – Pacific Decadal Oscillation) и Южное колебание – Эль-Ниньо (ENSO – El-Nino and Southern Oscillation). По своей сути климатические колебания представляют собой объединение различных деталей в обобщенное полное описание атмосферы или океана, которое может в дальнейшем использоваться, для характеристики факторов, которые воздействуют на глобальную систему климата. Климатические колебания в основном определяются исходя из измерений, сделанных на ограниченной территории, но они могут оказывать свое влияние по всему земному шару. Климатические колебания используются для того, чтобы охарактеризовать и понять различные механизмы климата.

Арктическое колебание (осцилляция) считается одним из основных климатических колебаний, характеризующих несезонные вариации атмосферного давления над уровнем моря севернее 20° с.ш. Арктическое колебание было определено как первая мода разложения на естественные ортогональные функции изменения давления на уровне моря в зимнее время (январь-февраль-март) на Северном Полушарии за тропическим поясом. Арктическое колебание является моделью колебаний атмосферного давления от Арктического бассейна до средних широт между двумя фазами – положительной, и отрицательной. При положительной фазе (положительный индекс) модель проявляет себя в пониженном давлении по полярному региону и в повышенном давлении на средних широтах. При отрицательной фазе (отрицательный индекс) модель проявляет себя противоположным образом. Положительная и отрицательная фаза также упоминаются как теплая и холодная соот-

ответственно. Из-за своей сильной зональной симметрии Арктическое колебание также часто называют северной кольцевой модой. Во время положительной фазы из Атлантического океана в Арктику приходят более тёплые и солёные воды, уменьшая тем самым слои особо холодной воды. Это приводит к тому, что климатические условия в северной Европе становятся более теплыми и влажными, чем обычно. Также в этой фазе холодный зимний воздух не проникает южнее Северной Америки и, соответственно, зимы для большей части Соединенных Штатов оказываются более теплыми, в то время как на островах Гренландия и Ньюфаундленда оказываются более холодными, чем обычно.

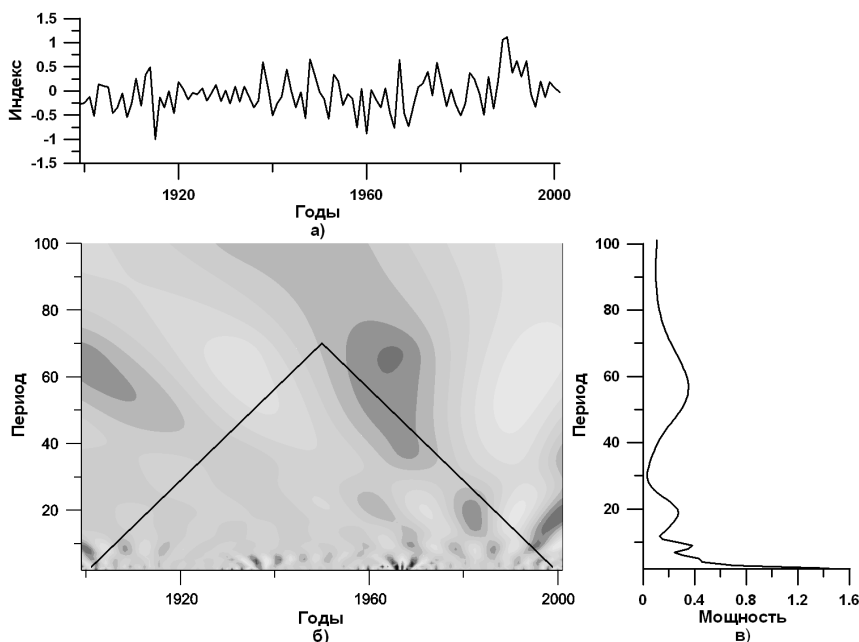


Рис. 4.1. Вейвлет-преобразование Арктического колебания

В период отрицательной фазы холодная пресная вода остаётся в заливах и бухтах северных морей, что препятствует таянию морского льда. Отрицательная фаза приводит к повышенному давлению по полярному региону и к пониженному на средних широтах (примерно на 45 градусах северной широты). Вейвлет-пре-

образование Арктического колебания представлено на рис. 4.1. На всем промежутке времени хорошо прослеживается период 8–10 лет. Также наблюдается период ~20 лет, но он присутствует не на всем промежутке времени.

Как минимум с 18 века было известно, что если в Дании суровая зима, то зима в Гренландии умереннее, чем обычно, и наоборот. Это поведение – часть моды поведения климата, известной как Североатлантическое колебание. Североатлантическое колебание является колебанием разности в атмосферном давлении на уровне моря между Арктикой и субтропической Атлантикой, которые являются наиболее заметными в течение арктического холодного сезона (ноябрь–апрель) и связаны с изменениями в средней скорости ветра и его направлении. Западные ветра, дующие поперек Атлантики, приносят теплый, влажный воздух в Европу. В годы, когда западные ветра сильны, летом прохладно, зимой умеренно и осадки выпадают чаще, чем обычно. Если западные ветра ослабевают, температура летом и зимой достигает своих критических отметок, приводя к переносу теплых воздушных масс, сильным заморозкам и меньшему количеству осадков. Постоянная область низкого давления по Гренландии (низ Субарктики) и постоянная область высокого давления на Азорских островах управляют направлением и силой западных ветров в Европу. Изменения в Североатлантическом колебании изменяют обычный сезонный перенос тепла и осадков между Атлантикой и соседними континентами, также изменяется количество штормов, их сила и направление движения. Кроме того, изменения в Североатлантическом колебании вызывают существенные изменения температуры поверхности океана, океанических течений и сопутствующих переносов тепла. Изменения в покрытии льда в арктических и субарктических регионах также связаны с Североатлантическим колебанием. Такие климатические изменения оказывают влияние на сельскохозяйственные урожаи, водообеспечение, энергоснабжение, улов рыбы и т.д. Индекс Североатлантического колебания определяется как нормированная разность давлений между двумя станциями, одна из которых находится в Исландии (64° с.ш., 24° з.д.), а другая вблизи Азорских островов (39° с.ш., 24° з.д.). Большой индекс Североатлантического колебания (когда разность давлений между двумя станциями высока) называют положительной фазой Североатлан-

тического колебания. А маленький индекс, соответственно, отрицательной фазой. В положительной фазе во время зимы усиливаются западные ветра вдоль Северной Атлантики, перемещая относительно теплый и сырой морской воздух вдоль большей части Европы и дальше, через Азию, в то время как более сильные северные ветра несут холодный воздух вдоль Гренландии и северо-востока Канады на юг. При этом уменьшается температура воздуха и температура поверхности океана по северо-востоку Атлантики. Известно также влияние на изменения температуры по Северной Африке и Ближнему Востоку (похолодание), а также по Северной Америке (потепление).

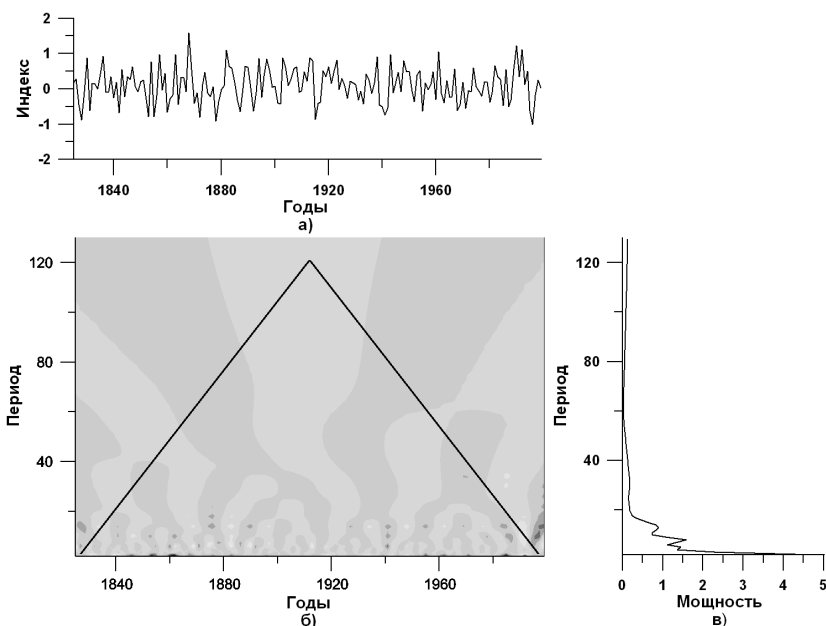


Рис. 4.2. Вейвлет-преобразование Североатлантического колебания

Во время низких значений индекса интенсивность атмосферных образований ослабевает, интенсивность ветров уменьшается, и направление их смещается в сторону Средиземноморья, где устанавливается тёплая, влажная погода. В северной Европе в этом случае наоборот преобладающей является сухая и холодная погода. Вейв-

лет-преобразование Североатлантического колебания представлено на рис. 4.2. Хорошо виден период  $\sim 8$  лет, также в данных присутствует период  $\sim 13$  лет.

Индекс Тихоокеанского декадного колебания – это первый главный компонент наблюдаемых изменений ежемесячных температур на поверхности океана (после удаления глобального долговременного теплого тренда) севернее 20 градусов с.ш. Ежемесячный индекс Тихоокеанского декадного колебания часто усредняется в пределах сезона или года для того, чтобы получить ежегодный индекс, который используется в исследованиях климатическо-биологических связей. Когда в зимнее время температура поверхности Тихого океана в его северной части очень холодная, а давление на уровне моря – ниже среднего, то этот индекс имеет положительные значения, т.е. тёплая фаза. Если наоборот, то эти значения отрицательные, т.е. холодная фаза. Основные различия между теплой и холодной фазами наблюдаются в течение зимних и весенних сезонов. В течение положительной фазы Тихоокеанского декадного колебания Алеутская система низкого давления углубляется и смещается на юг, штормовая активность в зимнее время года на севере Тихого океана увеличивается, температура поверхности северо-восточной и тропической части Тихого океана существенно повышается, а в центре – понижается. Зимы на северо-западе Северной Америки становятся более теплыми, а на юго-востоке США более холодными. Количество выпавших осадков на юге США и севере Мексики во время зимы становится больше, чем обычно, а на северо-западе Северной Америки и на Великих Озерах меньше. Также положительная фаза связана с богатым уловом рыбы на Аляске и плохим вдоль западного побережья США. Во время холодной фазы зимой и весной увеличиваются риски затопления на северо-западе Тихого океана. Вейвлет-преобразование Тихоокеанского колебания представлено на рис. 4.3. Хорошо виден период  $\sim 25$  лет.

Также присутствуют периоды  $\sim 9$  и  $\sim 6$  лет, но не на всем промежутке времени. Также, возможно, существует период в промежутке 50–60 лет, но так как большая часть информации о колебаниях с этим периодом лежит вне треугольника достоверности, однозначно говорить о его существовании нельзя.

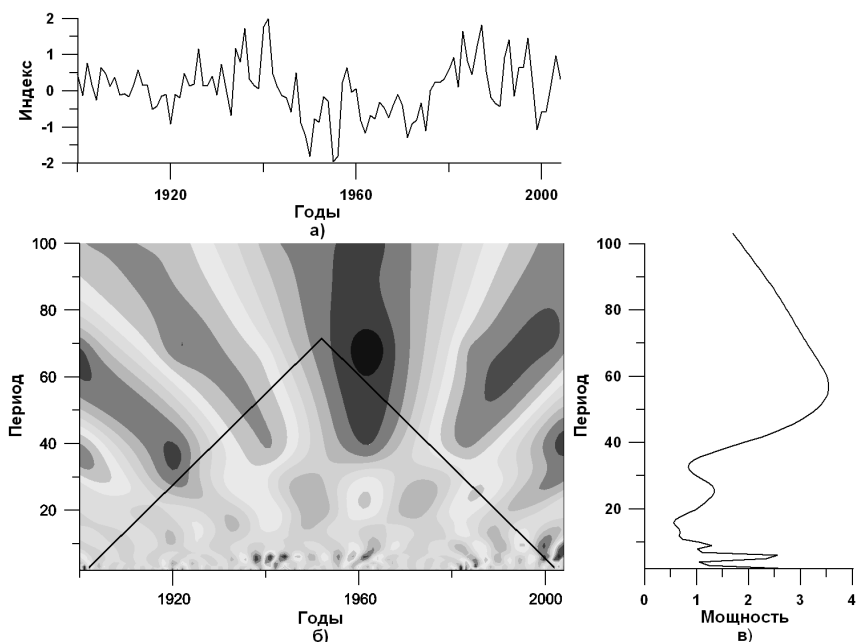


Рис. 4.3. Вейвлет-преобразование Тихоокеанского колебания

История Эль-Ниньо берет свое начало на восточном крае Тихого океана. В течение многих столетий перуанские рыбаки знали, что обычно холодные и богатые питательными веществами воды время от времени становятся очень теплыми, что сопровождается сокращением рыбных ресурсов. В это же время в Андах идут проливные дожди и случаются наводнения. Такие погодные аномалии происходят каждые 3–7 лет, и как правило, достигают своего максимума к Рождеству, рыбаки называли это явление Эль-Ниньо (по-испански, рождественский мальчик).

В течение долгого времени полагали, что Эль-Ниньо – это локальное явление для западной части Южной Америки. И только в начале 20-го столетия стало очевидно, что существует связь между Эль-Ниньо и условиями муссонов в Юго-Восточной Азии. Анализ записей давления на уровне моря с острова Таити (в центральном Тихом океане) и с острова Дарвина (Австралия) обнаружил, что разность между давлениями на этих метеостанциях меняется в противофазе с Эль-Ниньо. Эти колебания теперь известны как "Южная

осцилляция". Индекс Южной Осцилляции (SOI) определяется как нормализованная разность давлений на уровне моря между островами Таити и Дарвина. Обычно давление по экваториальному Тихому океану выше на востоке, чем на западе. Во время событий Эль-Ниньо эта разность давлений существенно уменьшается (или даже меняет знак). Поэтому эти отклонения давления использовались, чтобы идентифицировать события Эль-Ниньо. В последние годы стало популярным использовать отклонения температуры поверхности океана или изменения уровня океана в восточной Тихого океана для определения событий Эль-Ниньо. Эль-Ниньо и Ла-Нинья официально определены как длительные отклонения температуры поверхности океана от нормы на величину больше, чем  $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ , пересекающие Тихий Океан в его центральной тропической части. Когда наблюдается условие  $+0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $-0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) менее пяти месяцев, то это классифицируется как условие Эль-Ниньо (Ла-Нинья). Если такое отклонение сохраняется на протяжении пяти месяцев или дольше, то оно классифицируется как эпизод Эль-Ниньо (Ла-Нинья). Длительные отрицательные значения SOI часто сигнализируют об эпизодах Эль-Ниньо. Эти отрицательные значения обычно сопутствуют продолжительному потеплению центральной и восточной тропических частей Тихого океана, уменьшению силы тихоокеанских пассатов и сокращению выпадения осадков на востоке и севере Австралии. Положительные значения SOI ассоциируются с сильными тихоокеанскими пассатами и потеплением воды на севере Австралии и соответственно с эпизодом Ла-Нинья. Воды центральной и восточной тропических частей Тихого океана становятся холоднее на протяжении этого времени. Вместе всё это увеличивает вероятность выпадения большего, чем обычно, количества осадков в восточной и северной Австралии. Термины Южное колебание – Эль-Ниньо (ENSO) и цикл ENSO использованы для того, чтобы описать полный диапазон изменений, наблюдаемых в SOI, включая события Эль-Ниньо и Ла-Нинья. Вейвлет-преобразование Южного колебания – Эль-Ниньо представлено на рис. 4.4. Хорошо прослеживаются колебания с периодами  $\sim 60$ ,  $\sim 32$ ,  $\sim 12$  и  $\sim 5$  лет.

Таким образом, выявляя при помощи вейвлет-анализа характерные периоды климатических колебаний, можно дать прогноз о поведении климатических систем в будущем.

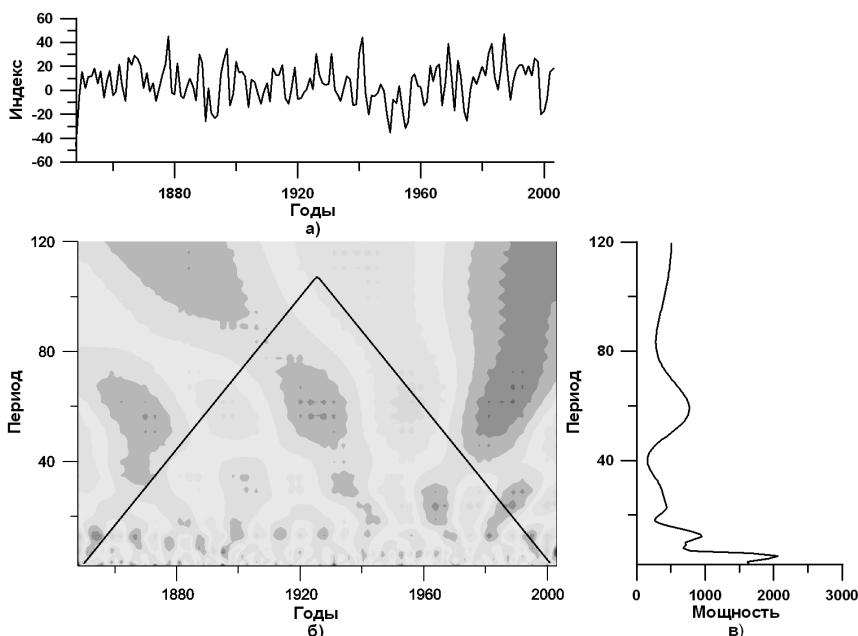


Рис. 4.4. Вейвлет-преобразование Южного колебания – Эль-Ниньо

Кроме того, вейвлет-анализ может помочь при проведении реконструкций прошлого климата. Для этого выявляются характерные периоды, присутствующие в косвенных источниках изменений климата. Косвенными источниками прошлого климата являются природные архивы, которые, в некотором роде, включают климатический сигнал в свою структуру. Эти природные архивы связаны с климатом своей биологической, химической или физической природой. Основным климатическим сигналом, который фиксируется большинством косвенных источников изменений климата, является температура. Также косвенные источники изменений климата могут зафиксировать количество осадков, освещенность, состав атмосферы и другие климатические параметры. Все косвенные источники являются непрямыми измерениями изменений климата, и они значительно отличаются по характеру и качеству предоставляемой информации. В основном для реконструкций прошлого климата используются следующие косвенные источники: исторические документы; кольца деревьев; кораллы; ледниковые керны;



озерные отложения; пещерные отложения; скважины в горных породах и ледниках. Это связано с тем, что эти косвенные источники могут предоставить информацию с высоким разрешением по времени.

Проведем вейвлет-анализ данных по ширине колец деревьев. Кольца деревьев являются самым распространенным косвенным источником изменений климата. Каждый год радиальный прирост у деревьев откладывается в форме древесных колец. Особенно четко они видны на поперечных срезах хвойных пород. Так как рост дерева зависит от климатических условий, характер ширины колец деревьев отражает изменения климата. В благоприятные, то есть в теплые и богатые осадками, годы годовой прирост ствола дерева больше, чем в неблагоприятные, холодные и засушливые. Таким образом, изучая годичные кольца на срезе дерева, можно судить о климате прошлых лет и его изменениях. Деревья формируют одно кольцо в год и, соответственно, делают запись климатических изменений с ежегодным разрешением. Проведем вейвлет-анализ единой региональной хронологии лиственницы KAML. Хронология составлена из локальных хронологий, полученных на полуострове Камчатка. Эта хронология хорошо коррелирует с прошлыми температурами, полученными на метеостанциях Камчатки. Данное обстоятельство дает возможность рассматривать единую региональную хронологию лиственницы как долгосрочный источник информации о прошлых температурах на полуострове Камчатка. Из вейвлет-преобразования (рис. 4.5) видно, что для полуострова Камчатка характерны следующие периоды изменений климата: ~53, ~25, ~16 и ~8 лет. Возможно, существует период ~200 лет, но, так как большая часть информации о колебаниях с этим периодом лежит вне треугольника достоверности, однозначно говорить о его существовании нельзя.

Проведем вейвлет-анализ данных, полученных на станции Восток. Станция Восток расположена в центральной части Восточной Антарктиды на высоте 3490 м. Средняя годовая температура здесь –55,5 °С, осадков за год накапливается 23 мм. Толщина льда близка к 3500 м, таким образом, вся толща содержит лед, отложенный на протяжении сотен тысяч лет, что крайне важно для палеогеографических реконструкций. Керна из района станции Восток охватывает голоцен (последние 10 тыс. лет), последнюю – валдайскую,

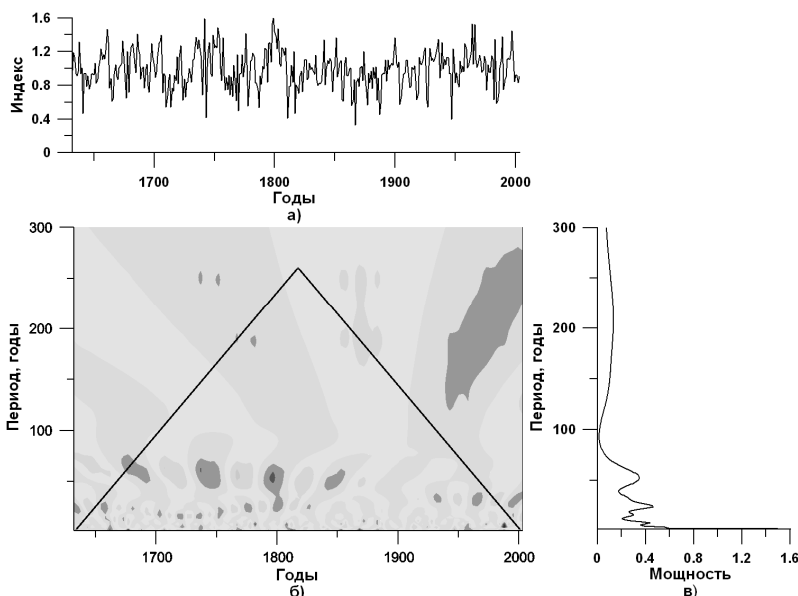


Рис. 4.5. Вейвлет-преобразование единой региональной хронологии лиственницы KAML

или вюрмскую – ледниковую эпоху (10–120 тыс. лет назад), микулинское (или риссвюрмское) межледниковье (120–130 тыс. лет назад) и заключительные этапы предпоследнего – днепровского или рисского – оледенения. Это единственная колонка льда, покрывающая весь последний ледниково-межледниковый цикл. Полученные на станции Восток данные по относительному содержанию изотопа кислорода  $\delta^{18}\text{O}$  охватывают последние 414000 лет. Данные по относительному содержанию изотопа кислорода  $\delta^{18}\text{O}$  во льду служат основой для определения палеотемператур. Это связано с тем, что изотопный состав атмосферных осадков, сохранившихся в виде отложенного снега, зависит от температуры формирования этих осадков. То есть, чем больше содержание тяжелых изотопов в слое льда, тем выше была температура во время формирования этого слоя. Вейвлет-анализ данных по относительному содержанию изотопа  $\delta^{18}\text{O}$  за последние 414000 лет изображен на рис. 4.6. Хорошо видны периоды  $\sim 100000$ ,  $\sim 43000$ ,  $\sim 22000$  лет.

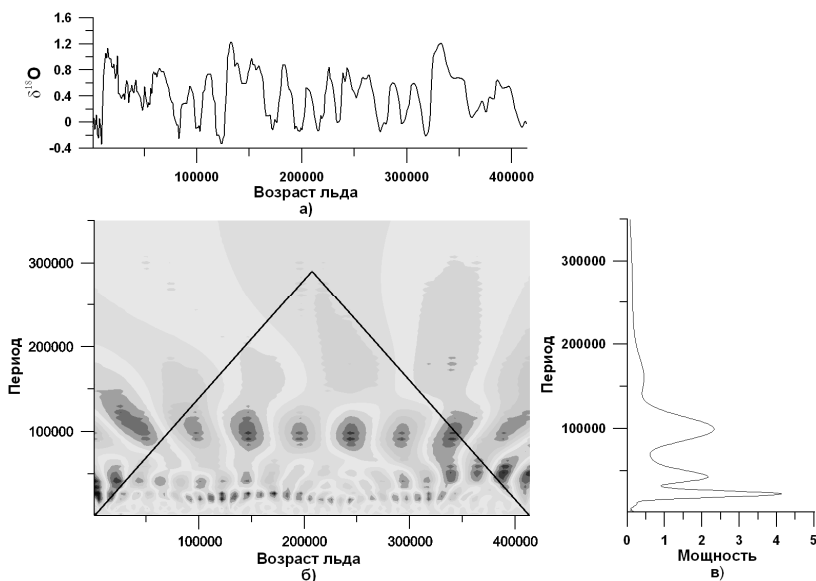


Рис. 4.6. Вейвлет-преобразование данных по относительному содержанию изотопа  $\delta^{18}\text{O}$ , полученных на станции Восток

## 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА РАСШИРЕНИЯ WAVELET-TOOLBOX СИСТЕМЫ MATLAB

Наиболее доступным для изучения применением вейвлет-анализа и в то же время наиболее простым путем освоения является использование включённого в систему математического моделирования MATLAB специализированного пакета расширений Wavelet-toolbox.

Для работы с расширением вейвлет-анализа в системе MATLAB предусмотрены две возможности: режим командной строки, и графический режим пользователя. Для использования режима командной строки необходимо знать основные команды и синтаксис системы математического моделирования MATLAB, а также команды пакета расширений Wavelet-toolbox. Некоторые наиболее употребительные команды для командной строки при использовании пакета расширений Wavelet-toolbox приведены ниже. Например на стр. 93–95 приведён ответ системы на запрос в командной

строке ***waveinfo***: дано описание групп вейвлетов с их основными свойствами, доступными для работы в системе; команда ***waveinfo('wname')***, где в качестве параметра вводится имя вейвлета. Перечень всех семейств вейвлетов в MATLAB приведен в табл. 5.1. Пояснение по конкретной команде MATLAB можно получить, напечатав в командной строке ***help*** и назвав требуемую команду или функцию.

Более простой способ для первоначальной работы, но с несколько ограниченными возможностями – использование главного меню пакета расширений Wavelet-Toolbox (User GUI). По команде ***wavemenu*** в отдельном окне на экран дисплея выводится Wavelet-Toolbox Main Menu с основными доступными функциями (рис. 5.1).

Знакомство с возможностями пакета расширений Wavelet-Toolbox программного комплекса MATLAB и изучения его основных возможностей в комплексе рекомендуется начинать с запуска демонстрационного режима, который вызывается командой ***wavedemo*** из командной строки. В результате в отдельном окне выводится демо-версия Wavelet-Toolbox Main Menu с уже заданными параметрами, и либо в автоматическом режиме, либо пошагово пользователю демонстрируются возможности системы User GUI (рис. 5.2).

Таблица 5.1

Семейства вейвлетов в MATLABe

Краткое имя, используемое в MATLAB	Имя семейства вейвлетов
Haar	Вейвлеты Хаара
Db	Вейвлеты Добеши
Sym	Симлеты
Coif	Койфлеты
Bior	Биортогональные вейвлеты
Rbio	Дуальные биортогональные вейвлеты
Meyr	Вейвлеты Мейера
Dmey	Дискретные аппроксимации вейвлетов Мейера
Gaus	Вейвлеты на основе производных функции Гаусса

Mexh	Вейвлет «мексиканская шляпа»
Morl	Вейвлеты Морле
Cgau	Комплексные Гауссовы вейвлеты
Shan	Вейвлеты Шеннона
Fbsp	Частотные В-сплайновые вейвлеты
Cmor	Комплексные вейвлеты Морле

Продemonстрируем пример работы с командной строкой. Реакция комплекса MATLAB на команду ***waveinfo***:

**>> *waveinfo***

*INFOWAVE Information on wavelets.*

*Wavelets*

*1. Crude wavelets.*

*Wavelets: gaussian wavelets (gaus), morlet, mexican hat (mexihat).*

*Properties: only minimal properties*

*– phi does not exist.*

*– the analysis is not orthogonal.*

*– psi is not compactly supported.*

*– the reconstruction property is not insured.*

*Possible analysis:*

*– continuous decomposition.*

*Main nice properties: symmetry, psi has explicit expression.*

*Main difficulties: fast algorithm and reconstruction unavailable.*

*2. Infinitely regular wavelets.*

*Wavelets: meyer (meyr).*

*Properties:*

*– phi exists and the analysis is orthogonal.*

*– psi and phi are indefinitely derivable.*

*– psi and phi are not compactly supported.*

*Possible analysis:*

*– continuous transform.*

*– discrete transform but with non FIR filters.*

*Main nice properties: symmetry, infinite regularity.*

*Main difficulties: fast algorithm unavailable.*

*Wavelets: discrete Meyer wavelet (dmey).*

*Properties:*

– *FIR approximation of the Meyer wavelet*

*Possible analysis:*

– *continuous transform.*

– *discrete transform.*

*3. Orthogonal and compactly supported wavelets.*

*Wavelets: Daubechies (dbN), symlets (symN), coiflets (coifN).*

*General properties:*

–  *$\phi$  exists and the analysis is orthogonal.*

–  *$\psi$  and  $\phi$  are compactly supported.*

–  *$\psi$  has a given number of vanishing moments.*

*Possible analysis:*

– *continuous transform.*

– *discrete transform using FWT.*

*Main nice properties: support, vanishing moments, FIR filters.*

*Main difficulties: poor regularity.*

*Specific properties:*

*For dbN : asymmetry*

*For symN : near symmetry*

*For coifN: near symmetry and  $\phi$  as  $\psi$ , has also vanishing moments.*

*4. Biorthogonal and compactly supported wavelet pairs.*

*Wavelets: B-splines biorthogonal wavelets (biorNr.Nd and rbioNr.Nd).*

*Properties:*

–  *$\phi$  functions exist and the analysis is biorthogonal.*

–  *$\psi$  and  $\phi$  both for decomposition and reconstruction are compactly supported.*

–  *$\phi$  and  $\psi$  for decomposition have vanishing moments.*

–  *$\psi$  and  $\phi$  for reconstruction have known regularity.*

*Possible analysis:*

– *continuous transform.*

– *discrete transform using FWT.*

*Main nice properties: symmetry with FIR filters, desirable properties for decomposition and reconstruction are split and nice allocation is possible.*

*Main difficulties: orthogonality is lost.*

## 5. Complex wavelets.

*Wavelets: Complex Gaussian wavelets (cgauN), complex Morlet wavelets (cmorFb-Fc), complex Shannon wavelets (shanFb-Fc), complex frequency B-spline wavelets (fbpsM-Fb-Fc).*

*Properties: only minimal properties*

- *phi does not exist.*
- *the analysis is not orthogonal.*
- *psi is not compactly supported.*
- *the reconstruction property is not insured.*

*Possible analysis:*

- *complex continuous decomposition.*

*Main nice properties: symmetry, psi has explicit expression.*

*Main difficulties: fast algorithm and reconstruction unavailable.*

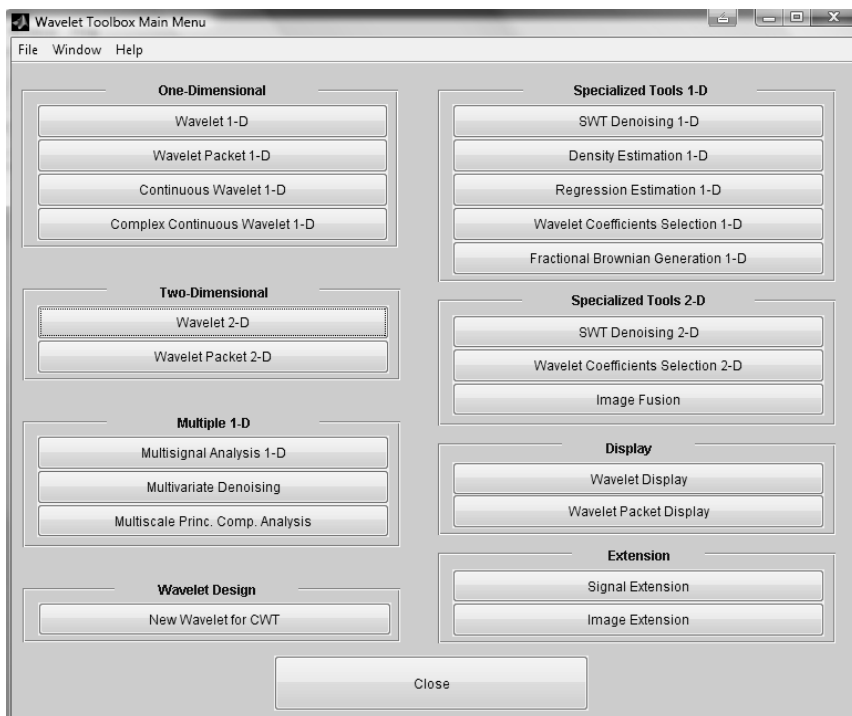


Рис. 5.1. Основное меню расширения Wavelet-Toolbox

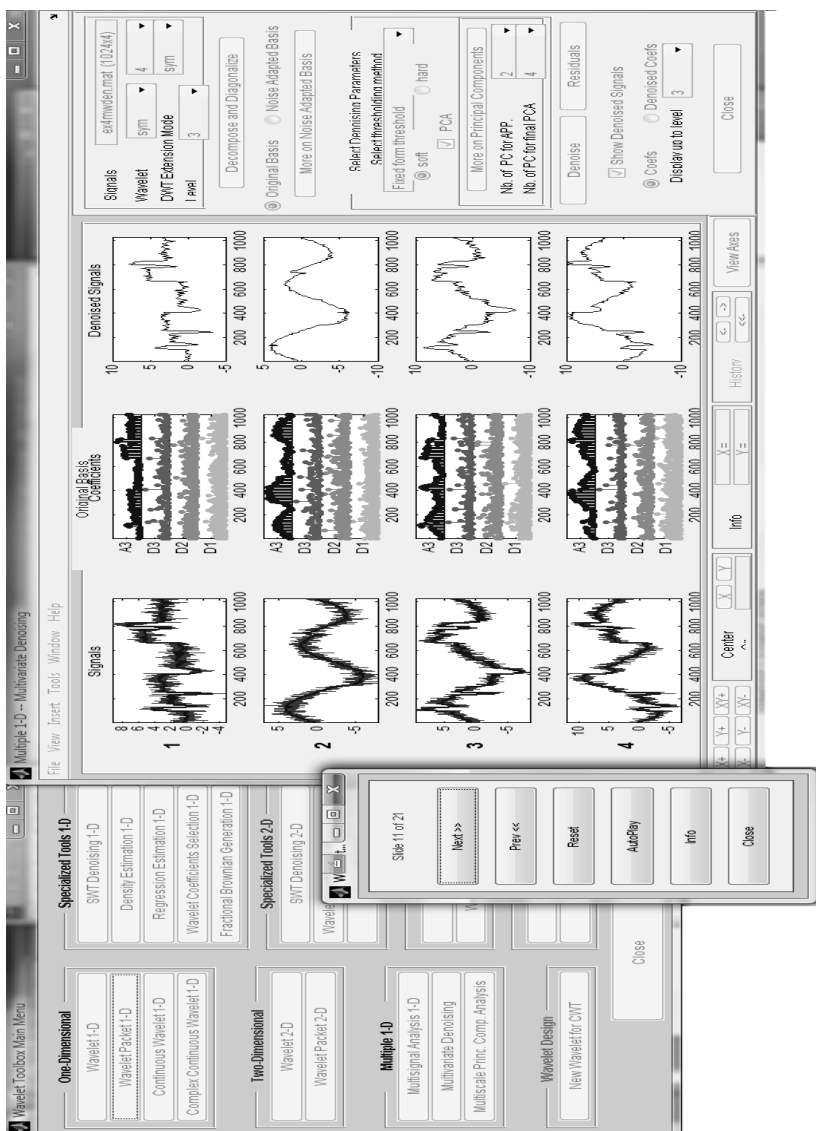


Рис. 5.2. Система ниспадающих меню при демонстрации алгоритма очистки от шума (denoising) различных 1-D сигналов в демонстрационной версии основного меню Wavelet Toolbox, вызываемой командой *wavedemo*



На рис. 2.43 был приведён пример фиксации точки разрыва второй производной у непрерывности функции с помощью вейвлет-анализа сигнала. Рассмотрим подробнее, как это осуществляется с применением Wavelet-Toolbox. В данном случае используется вейвлет Добеши db4, и сигнал раскладывается до уровня 2. На рис. 5.3,а изображены исходный и реконструированный сигналы, а также дерево (слева) разложения сигнала на составляющие. Хорошо видно, что двух уровней разложения достаточно для практически точной реконструкции исходного сигнала. На рис. 5.3,б изображены составляющие разложения, ветви d1 и d2 фиксируют наличие разрыва второй производной сигнала при  $x = 500$ . При этом, как и следовало ожидать, разрешающая способность у более высокочастотного вейвлета выше.

На рис. 5.4–5.6 демонстрируются возможности применения системы User GUI на примере вейвлет-анализа сигналов, представляющих собой центральные сечения фотографий ядер клеток крови

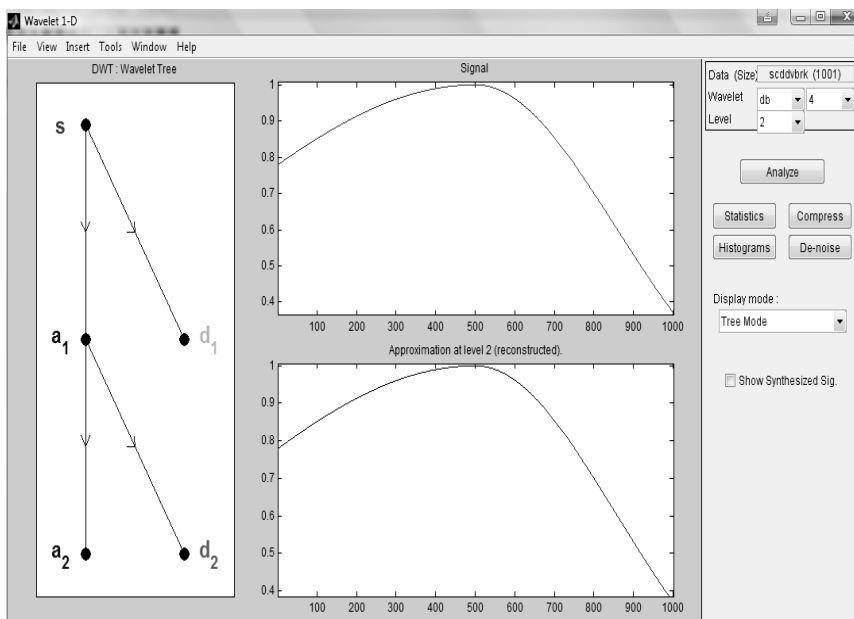


Рис. 5.3а. Дерево вейвлет-декомпозиции сигнала при применении Wavelet-Toolbox

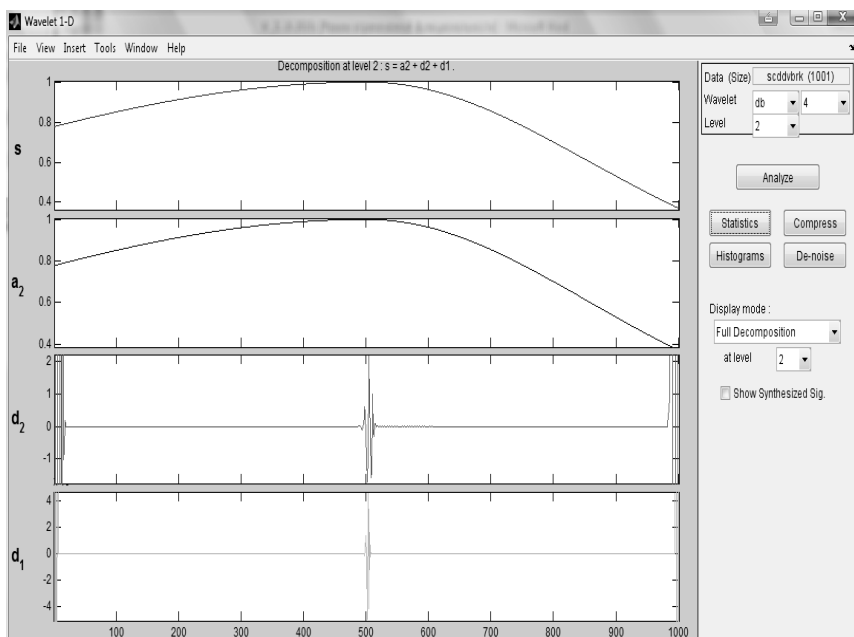


Рис. 5.3б. Вейвлет-составляющие сигнала при использовании db4

На рис. 5.4 анализируется ядро здоровой клетки лимфоцита, на рис. 5.5 и 5.6 – ядро бластной (поражённой) клетки. В данном случае использованы вейвлеты Морле (рис. 5.5) и Добеши db4 (рис. 5.6). Система User GUI позволяет оперативно менять, как тип используемого для анализа вейвлета, так и параметры визуализации полученных результатов. Это позволяет по имеющейся базе здоровых и поражённых клеток крови определить информативные признаки заболеваний с целью создания автоматизированной системы ранней гематологической диагностики, в частности, использовать следующие идентификационные признаки: сумму вейвлет-коэффициентов, энергию (сумма квадратов вейвлет-коэффициентов), максимальное значение коэффициента, среднее арифметическое и дисперсию вейвлет-коэффициентов, разность между максимальным и минимальным вейвлет-коэффициентами (подробнее см. [20]).

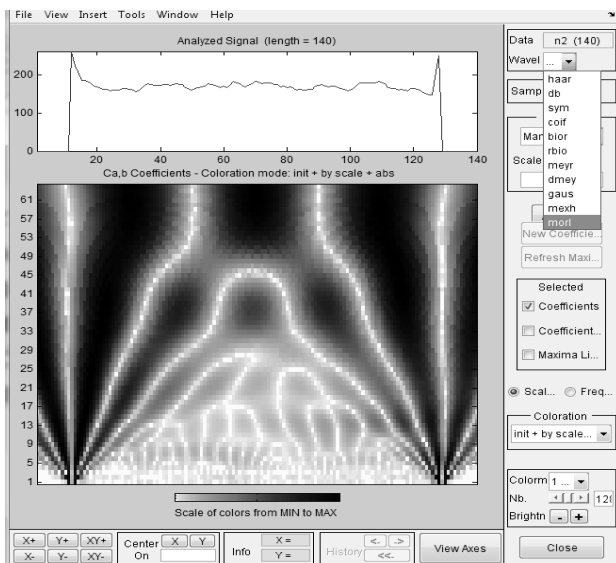


Рис. 5.4. Анализ ядра здоровой клетки лимфоцита системой User GUI в Wavelet-Toolbox MATLAB вейвлетом Морле

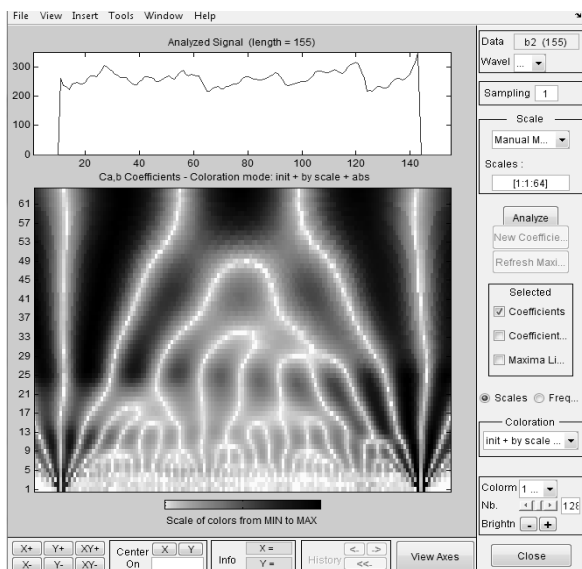


Рис. 5.5. Вейвлет- анализ ядра бластной (поражённой) клетки с использованием системы User GUI в Wavelet-Toolbox MATLAB вейвлетом Морле

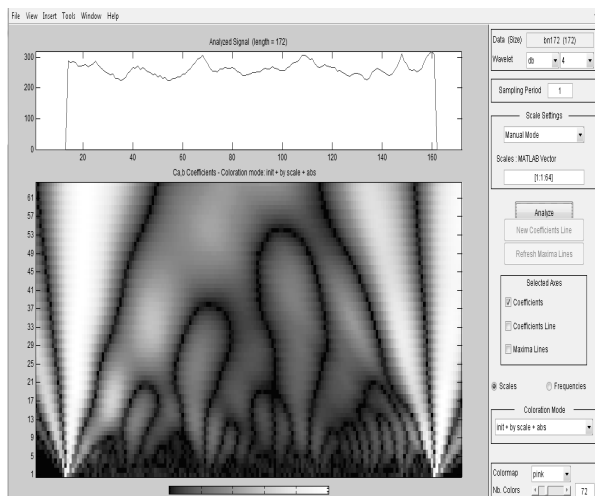


Рис. 5.6. Вейвлет-анализ ядра бластной (поражённой) клетки с использованием системы User GUI в Wavelet-Toolbox MATLAB вейвлетом Добеши db4

## Основные вейвлеты, доступные при использовании Wavelet-Toolbox MATLAB

Набор инструментов анализа сигналов и изображений в системе Wavelet-Toolbox MATLAB постоянно расширяется. Перечислим наиболее универсальные и популярные семейства вейвлетов, имеющиеся в этой системе в настоящее время.

вейвлеты Добеши (рис. 5.7) *waveinfo ('db')*;  
 биортогональные вейвлеты (рис. 5.8);  
 конфлеты (рис. 5.9);  
 симплеты (рис. 5.10).

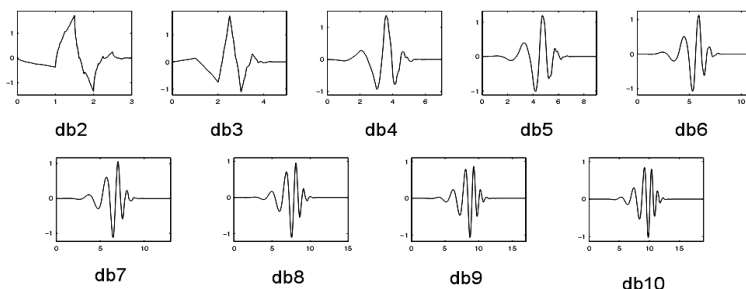


Рис. 5.7. Вейвлеты Добеши, подробности вызываются командой `waveinfo ('db')`

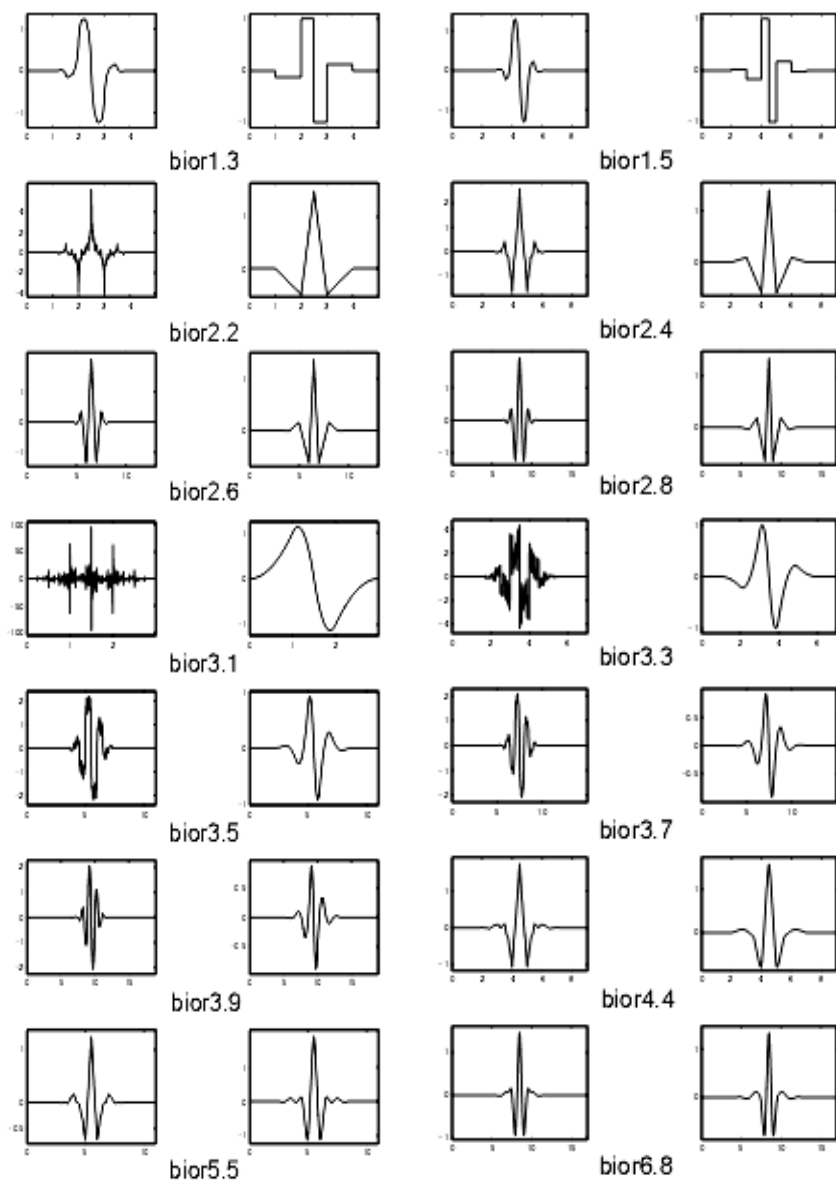


Рис. 5.8. Биортогональные вейвлеты

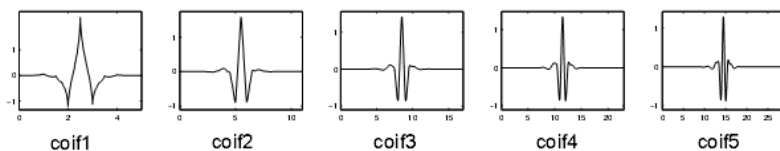


Рис. 5.9. Конфлеты

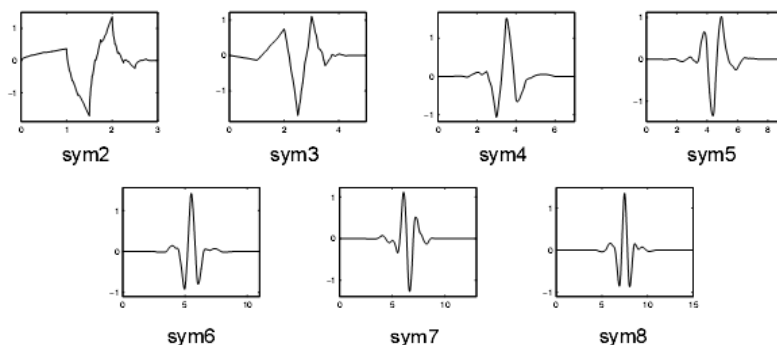


Рис. 5.10. Симплеты

## 6. АВТОМАТИЗАЦИЯ ДИАГНОСТИКИ ОСТРЫХ ЛЕЙКОЗОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

### 6.1. Острые лейкозы

Большой объем анализов, проводимых при обследовании пациентов медицинских учреждений, связан с регистрацией и интерпретацией врачом различных изображений – флюорография, компьютерная томография, эндоскопия и др. Для выявления острых лейкозов особое значение имеет анализ микроскопических изображений клеток крови.

Острые лейкозы – группа опухолевидных заболеваний системы крови, которые характеризуются первичным поражением костного мозга незрелыми (бластными) клетками. Острые лейкозы без лечения приводят к смертельному исходу. Однако при своевременном лечении вероятность выздоровления значительно повышается. Таким образом, своевременная диагностика острых лейкозов является

важнейшей задачей. Симптомы острых лейкозов в начале заболевания выражаются в проявлениях слабости, снижении массы тела, лихорадки. Диагностика начинается с изучения мазка периферической крови, наличие бластных клеток в которой свидетельствует о возможном наличии острого лейкоза.

Анализ морфологии клеток периферической крови с применением микроскопии является важнейшей частью диагностики заболеваний крови. На его основе производится первичная постановка диагноза. Так как стоимость комплексной диагностики значительна, очень важно поднять эффективность анализа, т.е. извлечь максимум информации из первичного анализа. В настоящее время морфологический анализ опирается главным образом на опыт и квалификацию врача.

Актуальность проблемы распознавания острых лейкозов связана с быстрым ростом заболеваемости, причиной которых является неблагоприятная экологическая ситуация. Несмотря на огромные достижения современной гематологии, позволяющие излечивать больных острыми лейкозами, которые в недалеком прошлом считались абсолютно безнадежными, основой диагностики этих заболеваний является обнаружение бластных клеток на мазках периферической крови. Этот, казалось бы, простой анализ наталкивается на ряд сложностей. Во-первых, вероятность распознавания бластных клеток гематологическим анализатором еще недостаточно высока, поэтому работу анализатора должен дополнять опытный врач гематолог, который является дефицитным специалистом и на подготовку которого может уйти не один десяток лет.

Акцент на острых лейкозах обусловлен рядом факторов. При острых лейкозах фактор времени имеет первичное значение, так как вероятность выздоровления больного напрямую связана с тем, как быстро был поставлен диагноз. Во-вторых, именно острые лейкозы вызывают наибольший процент ошибок у врачей гематологов.

Обнаружение бластных клеток в периферической крови при первом же обращении в медицинское учреждение обеспечивает более раннюю диагностику, что в первую очередь повышает эффективность лечения.

На этапе анализа изображения выделено несколько уровней автоматизации:

- визуальное сравнение изображений исследуемой клетки и клеток из атласа;
- проведение телемедицинской консультации со специалистами ведущих медицинских центров;
- автоматическое распознавание бластных клеток в мазке крови и поиск клеток в атласе, похожих на исследуемую клетку.

В классической теории распознавания образов типовой формой представления объектов распознавания является их отображение в виде точек в пространстве признаков (например, при двух признаках – в виде точек на плоскости). На практике же, в силу неизбежной вариабельности признаков, объекту распознавания соответствует не точка, а область.

Так, в системе распознавания микроскопических изображений сходимость измерений связана с шумами датчика (например, телекамеры), квантования; воспроизводимость измерений – с отклонениями подготовки объектной среды (например, биологических препаратов) с условиями измерений: настройка микроскопа, ориентация и местоположение объекта исследования в поле зрения микроскопа и др.

В случае распознавания объектов, значительно отличающихся по своим характеристикам (например, морфологическим), отмеченное выше обстоятельство несущественно. Однако для слаборазличимых объектов в условиях, когда соответствующие им кластеры в пространстве признаков находятся близко друг к другу, как показывает практика, оно может стать решающим в плане негативного влияния на точностные характеристики системы распознавания.

Фундамент эффективного решения рассматриваемой проблемы заложен в учете и статистически достоверной экспериментальной оценке главных факторов, определяющих вариабельность признаков. Такой эксперимент должен проводиться в процессе выбора информативных признаков, алгоритмов классификации, при разработке методического обеспечения систем распознавания, быть составной частью испытаний систем.

Ключевым моментом в задаче распознавания бластных клеток в системе обработки микроскопических изображений мазков крови является выбор признаков, описывающих клетки крови лейкоцитарного ряда. Отличительным свойством бластных клеток при ви-



зуальном микроскопическом анализе является структура ядра – нежнохроматиновая, тонкосетчатая с равномерной окраской и калибром нитей хроматина.

## 6.2. Автоматизированное обнаружение бластных клеток

Автоматизированные системы обработки изображений (АСО-ИЗ) – особый класс измерительных систем, основанных на распознавании и измерении характеристик объектов, представленных в виде изображения.

Основные этапы обработки изображений в АСОИЗ, предназначенных для распознавания, основываются на предварительной обработке, описании и классификации изображений и представлены на рис. 6.1.

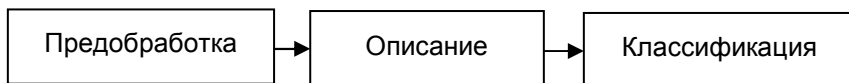


Рис. 6.1. Структура автоматизированной системы обработки изображений

Автоматическое обнаружение бластных клеток основано, в частности, на измерении текстурных признаков ядер лейкоцитов. Значение текстурных признаков зависит от пространственного распределения цветовых компонент изображения, что позволяет обнаружить наличие нежной структуры хроматина в ядре, являющейся отличительным свойством бластных клеток. Но на текстурные признаки также влияют и условия подготовки препарата крови и особенности формирования цифрового изображения. Поэтому для решения задачи автоматического обнаружения бластных клеток необходимо обеспечить формирование изображения клетки, соответствующего требованиям компьютерного анализа. В данной связи, прежде чем проводить обработку изображения необходимо удостовериться в его качестве.

Выделим два основных этапа в формировании цифровых изображений препаратов крови при автоматизированной диагностике острых лейкозов:

- приготовление препарата для микроскопического исследования;

– регистрация электронного изображения клеток крови.

На первом этапе существенным для качества изображения являются: подготовка стекла для препарата; процедура взятия крови; нанесение капли крови на стекло; процедура размазывания капли крови по стеклу; окраска препарата.

На втором этапе определяющие для качества изображения факторы включают настройку системы ввода изображений клеток крови в компьютер, выбор области препарата для съемки, выбор клеток для анализа, фокусировку оптической системы микроскопа для электронной регистрации изображения выбранной клетки, контроль качества введенного изображения.

Изображения, удовлетворяющие установленным требованиям, подвергаются последующей процедуре автоматической обработки, в результате которой выделяются карициты и производится их классификация с отнесением к одному из двух типов бластных и небластных клеток. Изображения, не прошедшие контроль качества, подвергаются дополнительному анализу с целью выявления причин аномалии и принятия мер по их устранению.

Введение этапа контроля качества цифрового изображения препарата крови позволит повысить достоверность результатов автоматизированного анализа мазков крови при диагностике острых лейкозов.

Задача создания компьютерных морфометрических анализаторов может быть решена в несколько этапов: на первых порах необходимо создание компьютерного атласа бластных клеток с включением в него как можно большего числа бластных клеток при различных вариантах острого лейкоза и других бластах. Для дифференциальной диагностики бластных клеток необходимо включить другие элементы, так называемые атипичные клетки, которые бластными не являются, такие как активированные лимфоциты, атипичные мононуклеары, молодые моноциты.

Вторым этапом является анализ неизвестного материала на основании созданного атласа бластных клеток с предъявлением обнаруженных системой бластных или атипичных клеток исследователю. И, наконец, на завершающем этапе – создание полностью автоматизированных систем с дифференциальным счетом лейкоцитов.

### 6.3. Классификация бластных клеток

Особняком от всех атипичных клеток, которые могут встречаться в патологической крови, стоят бластные клетки или просто бласты, составляющие субстрат наиболее тяжелых заболеваний системы крови – острых лейкозов. Далеко не всегда морфология бластов позволяет уверенно определить их линейную принадлежность (лимфоидную или миелоидную). По этой причине современная диагностика острых лейкозов включает в себя целый набор диагностических процедур, из которых изучение мазка и костного мозга является лишь первым этапом.

**Миелобласт** (рис. 6.2а). Ядро миелобласта чаще всего округлое, имеет типичную для бластных клеток структуру хроматина. Размеры клеток достигают 15–20 мкм. В ядре отчетливо видны от 2 до 5 ядрышек. У всех миелобластов соотношение ядра и цитоплазмы смещено в пользу ядра, цитоплазма обычно лишь узким ободком окружает ядро. Цитоплазма базофильная, иногда вакуолизированная, обычно содержит нежную азурофильную зернистость и палочки Ауэра. Палочки Ауэра являются абсолютным доказательством миелоидного происхождения бласта.

**Монобласт** (рис. 6.2б) – крупная клетка с бобовидным ядром, имеющим неглубокие вдавления, которые обусловлены складчатостью ядра; цитоплазма этих клеток меньше, чем у моноцита, но больше чем, у миелобласта; ее цвет бывает разных оттенков – от серо-голубого до интенсивно-синего; она нередко содержит скудную пылевидную азурофильную зернистость. Монобласты, как правило, сосуществуют в крови с миелобластами.

**Лимфобласт** (рис. 6.2в) – клетка размером примерно 15 мкм с беззернистой цитоплазмой обычно голубого цвета. Форма клетки округлая или овальная. Определяющий признак – ядро имеет нежно структурную хроматиновую сеть, состоящую из нитей равномерного калибра и окраски. Ядро лимфобласта занимает большую часть клетки, оно может содержать 1–2 мелких почти одинакового размера ядрышка, имеющих характерное перинуклеолярное уплотнение. Цвет ядрышек – от голубого до синего. Строго говоря, до проведения цитохимических и иммунологических исследований, точно определяющих линейную принадлежность опухолевых клеток (миелоидная, лимфоидная В- или Т-клеточная), любая бластная

клетка с описанной морфологией должна считаться морфологически неидентифицируемой. Исключение составляют клетки, которые в классификациях прошлых лет относились к так называемому L3-варианту острого лимфобластного лейкоза (сейчас L3 вариант острого лимфобластного лейкоза рассматривается как лимфома Беркитта, рис. 6.2г). Эти клетки идентифицируются благодаря выраженной по морфологическим признакам может быть поставлен диагноз и другого строго лейкоза лимфоидной природы – плазмобластного. Для него характерны относительно мелкие размеры опухолевых клеток, выраженная базофилия цитоплазмы с хорошо заметным перинуклеарным просветлением и эксцентричное расположения ядра (рис. 6.2е).

**Эритробласты** (рис. 6.2д) составляют субстрат одной из довольно редких форм острого миелоидного лейкоза – эритромиелоза или болезни Ди-Гульельмо. Это крупные клетки, размеры которых иногда превышают 20 мкм. Ядра эритробластов, как правило, округлые с крупными одиночными ядрышками. Характерны выраженная базофилия цитоплазмы и наличие перинуклеарного просветления. Эритробласты редко выходят в кровь.

Атипичные промиелоциты острого промиелоцитарного лейкоза (рис. 6.2ж-и) имеют ряд характерных особенностей, отличающих от нормальных промиелоцитов, с одной стороны, и типичных бластов – с другой. Первым и основным их отличием является выраженное клеточное многообразие – полиморфизм. Многие клетки имеют цитоплазматические выросты, напоминающие псевдоподии. Цитоплазма окрашивается в голубой цвет различных оттенков. Обычно она густо заполнена обильной, довольно крупной фиолетово-бурой зернистостью, которая часто концентрируется у одного из полюсов клетки (рис. 6.2ж). В цитоплазме лейкозных клеток нередко обнаруживаются палочки Ауэра, количество которых может достигать нескольких десятков (рис. 6.2и). В типичных случаях основную массу лейкозных клетках составляют элементы, имеющие зернистость, похожую по размерам на зернистость базофилов и тучных клеток. При этом элементы с мелкой, иногда пылевидной азурофильной зернистостью составляют лишь небольшой процент. При варианте, определяемом как микрогранулярный, такие мелкозернистые клетки преобладают. Кроме того, их отличают неболь-

шие размеры, неправильные контуры и уродливость ядер, которые часто бывают дву- или многодольчатыми (рис. 6.2з).

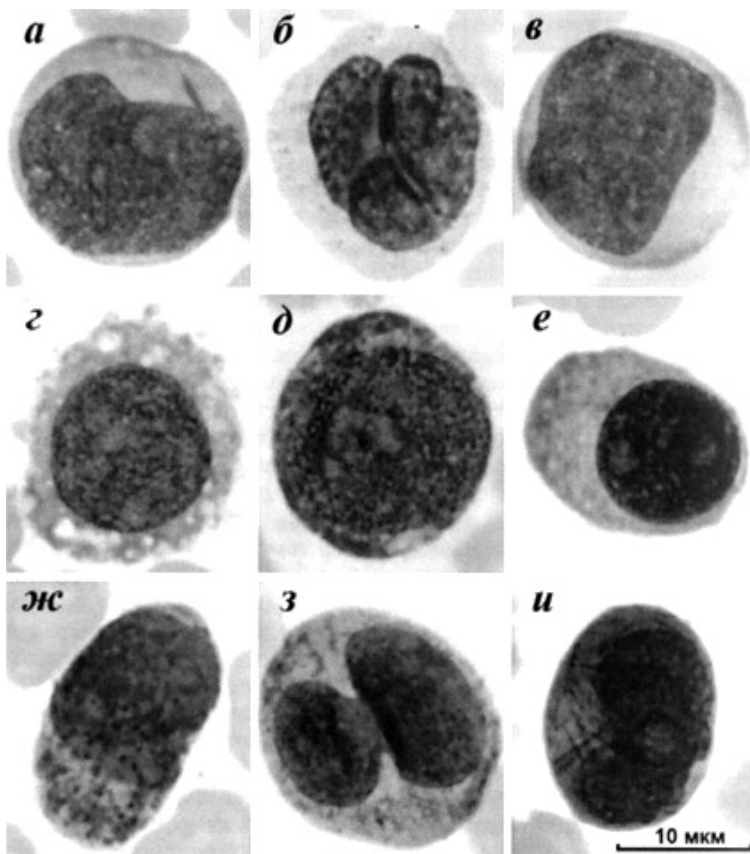


Рис. 6.2. Бластные клетки

#### 6.4. Механизм получения вейвлет-коэффициентов на примере базиса Хаара для анализа изображения

В качестве примера рассмотрим возможность применения вейвлет-преобразования изображений для классификации клеток крови в выборке из 390 клеток, содержащей бластные клетки (199 клеток) и лимфоциты(191клетка).

Рассмотрим применение вейвлет-преобразования Хаара для двух-мерного случая. Здесь имеем изображение размером  $M \times N$  ( $M$  строк,  $N$  столбцов):

$$\begin{array}{l} [X_{11}; X_{12}; \dots; X_{1n}] \\ [X_{21}; X_{22}; \dots; X_{2n}] \\ \vdots \\ [X_{m1}; X_{m2}; \dots; X_{mn}] \end{array}$$

$$\left[ \frac{X_{11}+X_{12}}{2}, \frac{X_{13}+X_{14}}{2}, \dots, \frac{X_{1n-1}+X_{1n}}{2}, \left| \frac{X_{11}-X_{12}}{2}, \frac{X_{13}-X_{14}}{2}, \dots, \frac{X_{1n-1}-X_{1n}}{2} \right| \right]$$

$$\left[ \frac{X_{21}+X_{22}}{2}, \frac{X_{23}+X_{24}}{2}, \dots, \frac{X_{2n-1}+X_{2n}}{2}, \left| \frac{X_{21}-X_{22}}{2}, \frac{X_{23}-X_{24}}{2}, \dots, \frac{X_{2n-1}-X_{2n}}{2} \right| \right]$$

$$\left[ \frac{X_{m1}+X_{m2}}{2}, \frac{X_{m3}+X_{m4}}{2}, \dots, \frac{X_{mn-1}+X_{mn}}{2}, \left| \frac{X_{m1}-X_{m2}}{2}, \frac{X_{m3}-X_{m4}}{2}, \dots, \frac{X_{mn-1}-X_{mn}}{2} \right. \right]$$

Каждая строка условно поделена на две части. Очевидно, правая часть каждой строки будет фильтром высоких частот.

Для удобства обозначим элементы полученного массива как показано ниже:

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{X}_{11}; \hat{X}_{12}; \dots; \hat{X}_{1n} \right] \\ & \left[ \hat{X}_{21}; \hat{X}_{22}; \dots; \hat{X}_{2n} \right] \\ & \dots \\ & \left[ \hat{X}_{m1}; \hat{X}_{m2}; \dots; \hat{X}_{mn} \right] \end{aligned}$$

Вновь произведем операции, аналогичные вышеприведенным, но со столбцами:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\hat{X}_{11} + \hat{X}_{21}}{2}, \frac{\hat{X}_{12} + \hat{X}_{22}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{1n} + \hat{X}_{2n}}{2} \right] \\ & \left[ \frac{\hat{X}_{31} + \hat{X}_{41}}{2}, \frac{\hat{X}_{32} + \hat{X}_{42}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{3n} + \hat{X}_{4n}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{\hat{X}_{m-11} + \hat{X}_{m1}}{2}, \frac{\hat{X}_{m-12} + \hat{X}_{m2}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{m-1n} + \hat{X}_{mn}}{2} \right]$$

$$\left[ \frac{\hat{X}_{11} - \hat{X}_{21}}{2}, \frac{\hat{X}_{12} - \hat{X}_{22}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{1n} - \hat{X}_{2n}}{2} \right]$$

$$\left[ \frac{\hat{X}_{31} - \hat{X}_{41}}{2}, \frac{\hat{X}_{32} - \hat{X}_{42}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{3n} - \hat{X}_{4n}}{2} \right]$$

$$\left[ \frac{\hat{X}_{m-11} - \hat{X}_{m1}}{2}, \frac{\hat{X}_{m-12} - \hat{X}_{m2}}{2}, \dots, \frac{\hat{X}_{m-1n} - \hat{X}_{mn}}{2} \right]$$

Каждый столбец условно поделен на две части. Нижняя часть – фильтр высоких частот. Механизм условно представлен на схемах рис. 6.4–6.6.

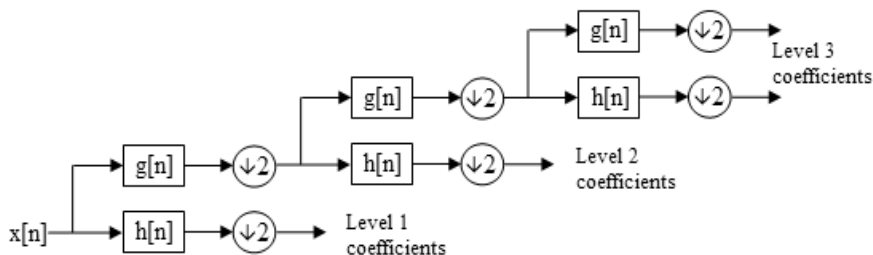
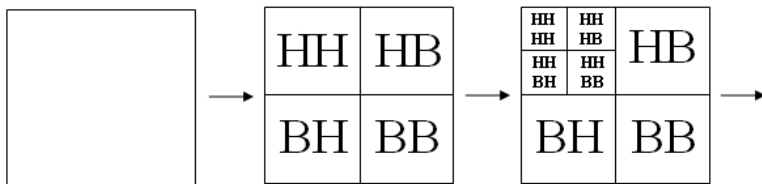


Рис.6.4. Схема вейвлет-декомпозиции изображения, где  $h[n]$  – фильтр высоких частот,  $g[n]$  – фильтр низких частот

НН	НВ
ВН	ВВ

Рис. 6.5. Схема вейвлет-разложения изображения на частотные диапазоны: Н – фильтр низких частот, В – фильтр высоких частот



		НН	НВ	НВ
		НН	НВ	
НН	НН	ВН	ВВ	ВН
ВН	ВН	ВН	ВВ	
ВН		ВВ		ВВ

Рис. 6.6. Схема вейвлет-преобразования изображения: Н – фильтр низких частот, В – фильтр высоких частот

Количество итераций  $= \log_2[\min(M; N)]$ , где  $M$  и  $N$  – количество строк и столбцов соответственно. В результате всех итераций будет получен массив вейвлет-коэффициентов, после чего можно составлять вейвлет-признаки.



## 6.5. Математическое описание и физический смысл вейвлет-признаков

Для обобщенной характеристики полученного массива вейвлет-коэффициентов применяют вейвлет-признаки. В качестве примера таких приведем следующие:

**sum** =  $\sum_{k=1}^n X_k$  сумма вейвлет-коэффициентов (физический смысл – накопление вейвлет-коэффициентов);

$$\text{sum\_re} = \left\{ \sum_{k=1}^n X_k \right\}^{-1}$$

**energy** =  $\sum_{k=1}^n (X_1^2 + X_k^2)$  – сумма квадратов вейвлет-коэффициентов. Физический смысл – энергия. Если вейвлет-коэффициенты меньше единицы, то их энергия (сумма квадратов) будет меньше суммы вейвлет-коэффициентов;

$$\text{energy\_re} = \left\{ \sum_{k=1}^n (X_1^2 + \dots + X_k^2) \right\}^{-1};$$

**max** =  $\max_k (X_k)$ , максимальный среди вейвлет-коэффициентов. Физический смысл – граница, за которую значения вейвлет-коэффициентов не переходят

$$\text{max\_re} = \{ \max_k (X_k) \}^{-1};$$

**range** =  $\max_k (X_k) - \min_k (X_k)$  разница между максимальным и минимальным среди вейвлет-коэффициентов. Физический смысл – диапазон изменения вейвлет-коэффициентов

$$\text{range\_re} = \{ \max_k (X_k) - \min_k (X_k) \}^{-1};$$

$$\text{mean} = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{k} \right\} = \sum_{k=1}^n X_k / k = \sum_{k=1}^n X_k / k - \text{среднее арифметическое среди вейвлет-коэффициентов. Физический смысл – математическое ожидание или среднее значение вейвлет-коэффициентов}$$

$$\text{mean\_re} = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{k} \right\}^{-1};$$

$\text{disp} = M[X_k^2] - (M[X_k])^2$  – дисперсия вейвлет-коэффициентов.

Физический смысл – наиболее вероятный предел колебаний вейвлет-коэффициентов вокруг его среднего значения

$$\text{disp\_re} = \{M[X_k^2] - (M[X_k])^2\}^{-1},$$

$M[X_k^2]$  – математическое ожидание величины  $X_k$ .

Здесь  $X_k$  –  $k$ -й вейвлет коэффициент (для упрощения записи формул используется развертка двумерного массива в числовой ряд)

Ниже приведены результаты расчета признаков «energy» и «range» для анализируемой выборки изображений клеток крови.

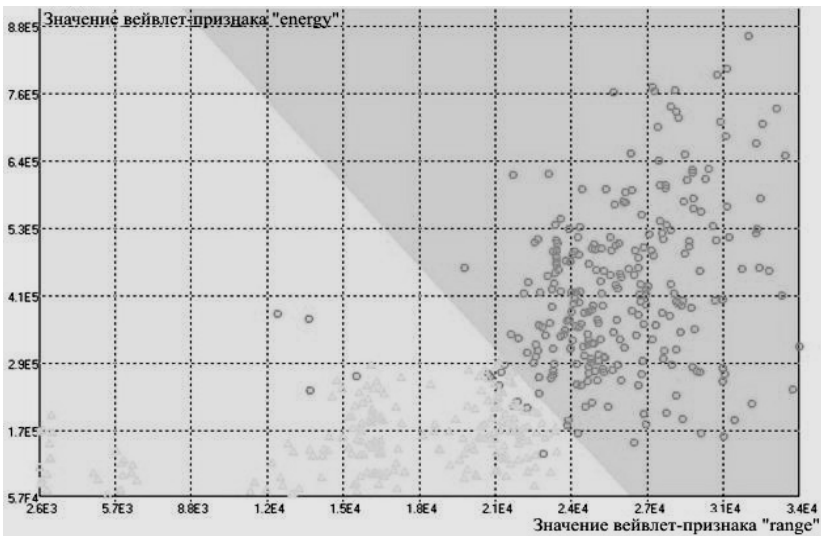


Рис. 6.7. Визуализация распределения клеток исследуемой выборки в пространстве вейвлет-признаков «energy» и «range»

На рис. 6.7 в двухмерном пространстве признаков **energy** и **range** представлено распределение клеток исследуемой выборки, содержащей бласты и лимфоциты, на рис. 6.8 показана гистограмма. Применение линейного классификатора в рассматриваемом

случае дает в результате ошибочную классификацию для 12 бла-  
стов и для 4 лимфоцитов, что в сумме составляет  $(12+4)/390=6\%$  .

Таким образом, применение вейвлет-преобразований является  
эффективным инструментом в решении широкого круга задач ана-  
лиза и классификации изображений и одномерных функций.

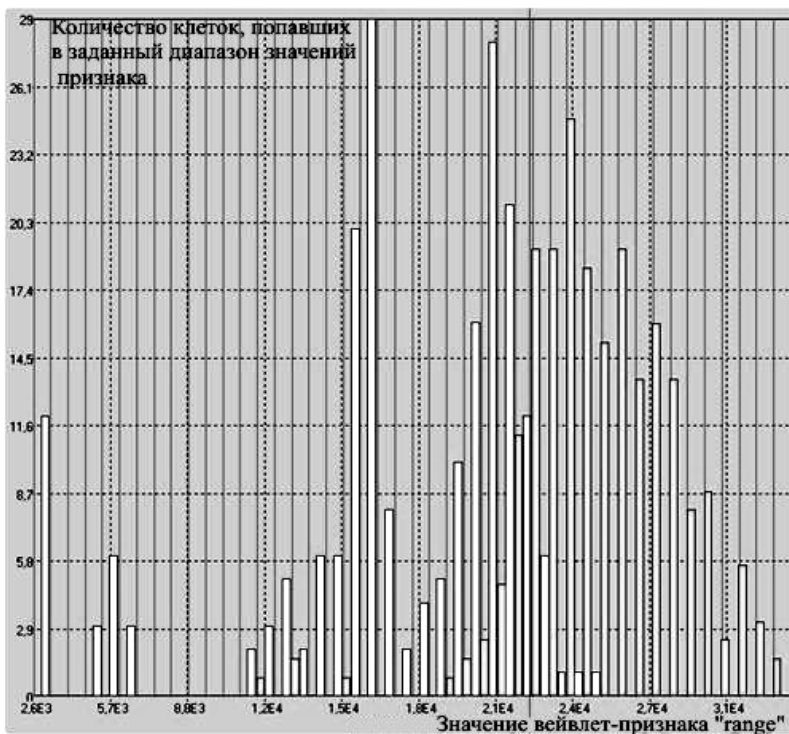


Рис. 6.8. Гистограмма распределения клеток исследуемой выборки по значениям признака «range»

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burt P., Adelson E. The Laplacian pyramid as a compact image code // IEEE Trans. Comm., 31. P. 482–540.
2. Chui C.K. Wavelets: a tutorial in theory and applications // Academic Press, 1992.
3. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets // SIAM, 1992.
4. Foster, G. Wavelets for Period Analysis of Unequally Sampled Time Series // Astronomical Journal, 1996, 112(4), 1709–29.
5. IEEE Trans. on Information Theory, Vol. 38, № 2, March 1992 (специальный номер по вейвлетам).
6. Smith M., Barnwell T. Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders // IEEE Trans. on ASSP, v. ASSP-34, № 3, June 1986.
7. Misiti M., Misiti Y., Oppenheim G., J.-M. Poggi. Wavelet Toolbox. For use with MATLAB. User's Guide // The MathWorks, Inc. – <http://www.mathworks.com>. 2002.
8. Polikar R. Введение в вейвлет-преобразование / Пер. В.Г. Грибунина. – СПб. АВТЭКС. – <http://www.autex.spb.ru>.
9. Алексеев К.А. Вокруг CWT: Очерк. [http://support.sibsiu.ru/MATLAB\\_RU/wavelet/book3/index.asp.htm](http://support.sibsiu.ru/MATLAB_RU/wavelet/book3/index.asp.htm).
10. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996, т.166, № 11. С. 1145–1170.
11. Витязев В.В. Вейвлет-анализ временных рядов. СПб.: 2001.
12. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования // ВУС, 1999. С.1–204.
13. Давыдов А.В. Вейвлетные преобразования сигналов. [Электронный ресурс] : [курс лекций для вузов ] // Вейвлеты. – 2009.
14. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002.
15. Илюшин. Теория и применение вейвлет-анализа. – <http://atm563.phus.msu.ru/Ilyushin/index.htm>.
16. Кирьянов Д.В., Сапонов Д.И. Вейвлет-спектры ионосферного радиосигнала // Тезисы конференции Ломоносов-99. М.:МГУ, 1999.
17. Киселев А. Основы теории вейвлет-преобразования. – <http://www.basegroup.ru/library/cleaning/intro-to-wavelets/>

18. Козлов П.В., Чен Б.Б. Вейвлет-преобразование и анализ временных рядов // Вестник КРСУ, 2002, № 2.
19. Левкович-Маслюк Л., Переберин А. Введение в вейвлет-анализ.
20. 8-я Международная конференции по компьютерной графике и визуализации ГрафиКон'98. – М.: ГрафиКон'98, 1998.
21. Никитаев В.Г. и др. Компьютерные системы гематологической диагностики. Введение: Учебное пособие. М.: МИФИ, 2006.
22. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов: Учебное пособие. – СПб, ИАНП РАН, 1999, 152 с.
23. Переберин А.В. О систематизации вейвлет-преобразований // Вычислительные методы и программирование, 2002. Т. 2. С. 15–40.
24. Сонечкин Д.М., Даценко Н.М., Иващенко Н.Н. Оценка тренда глобального потепления с помощью вейвлетного анализа // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1997. Т. 33. № 2. С. 184–194.

Нагорнов О.В., Никитаев В.Г., Простокишин В.М.,  
Тюфлин С.А., Проничев А.Н., Бухарова Т.И., Чистов К.С.,  
Кашафутдинов Р.З., Хоркин В.А.

## ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ

Учебное пособие

Редактор *Т.В. Волвенкова*  
Вёрстка *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 10.12.2009. Формат 60×84 1/16  
Печ.л. 10,0. Уч. изд. л. 10,0. Изд. № 1/1/76. Тираж 300 экз. Заказ № 15

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.*

ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».  
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42